N° D'ORDRE : 9

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE BESANÇON

POUR OBTENIR

LE DIPLOME DE DOCTEUR DE 3e CYCLE

SPÉCIALITÉ MÉTROLOGIE

par

Pierre-Paul VILLET

licencié ès-Sciences

THÈSE

ÉTUDE THÉORIQUE ET PRATIQUE D'UN ASSERVISSEMENT DE POSITION (CALCULATEUR DE COORDONNÉES)

Soutenue le 29 Avril 1960 devant la Commission d'Examen

JURY : MM. **THIRY** *Président*

MESNAGE, **RÉMOND** } *Examinateurs*

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547625_0037

N° D'ORDRE : 9

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE BESANÇON

POUR OBTENIR

LE DIPLOME DE DOCTEUR DE 3° CYCLE

SPÉCIALITÉ MÉTROLOGIE

par

Pierre-Paul VILLET

licencié ès-Sciences

THÈSE

ÉTUDE THÉORIQUE ET PRATIQUE D'UN ASSERVISSEMENT DE POSITION (CALCULATEUR DE COORDONNÉES)

Soutenue le 29 Avril 1960 devant la Commission d'Examen

JURY : MM. **THIRY** *Président*

MESNAGE, **RÉMOND** *Examinateurs*

UNIVERSITÉ DE BESANÇON

FACULTÉ DES SCIENCES

LISTE DES PROFESSEURS

Doyen Honoraire : M. GLANGEAUD

Professeurs Honoraires : MM. BAILLAUD, TOURNEUX, TRILLAT, VINCENSINI

Maître de Conférences Honoraire : M. GRANIER

Doyen : M. JACQUEMAIN (L.H.-C.G.-O.P.A.) Chimie Appliquée

Assesseur : M. MESNAGE (O.P.A.) ..... Chronométrie

Professeurs :

MM.	CHATELET (O.P.A.)	Mathématiques
	CROISOT (ch.P.A.)	Méthodes Mathématiques de la Physique
	DELHAYE	Astronomie
	DREYFUSS (O.P.A.)	Géologie et Minéralogie
	DUFFIEUX (L.H.-O.P.A.-M.A.)	Physique Générale
	JULLIEN (O.L.H.-C.G.-M.M.-O.P.A.)	Zoologie
	PERROT (O.P.A.)	Chimie Générale
	QUANTIN (O.P.A.)	Botanique
	THÉOBALD (L.H.-O.P.A.)	Géologie
	THIRY (ch.P.A.)	Mécanique
	TRONCHET (O.P.A.)	Botanique

Professeurs sans chaire :

MM.	CHALÉAT	Chronométrie
	UEBERSFELD	Physique

Maîtres de Conférences :

MM.	BAILLAUD	Botanique
	BERNARD	Chimie Physique
	PHAM MAU QUAN	Mathématiques
	POTIER	Physique
	RIGAL	Mathématiques
	RIPPLINGER	Zoologie
Mme	ROZIS	Physique
	THIÉBAUT	Géologie, Minéralogie

Professeur Associé : M. RÉMOND

Secrétaire Principal : M. LAMBERT

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

ÉTUDE THÉORIQUE ET PRATIQUE
D'UN ASSERVISSEMENT DE POSITION
(Calculateur de coordonnées)

par

Pierre-Paul VILLET

INTRODUCTION

Dans les différents actes qu'il a à accomplir, l'homme a toujours cherché à se faire remplacer. Pour son remplacement dans la "chaîne de puissance" (acte purement énergétique), il s'agit d'utiliser au mieux des machines ou diverses sortes d'énergie. Son remplacement dans la "chaîne de contrôle" (acte cybernétique) pose des problèmes de nature très particulière. Ce domaine de la Science est relativement récent et en pleine expansion. L'étude des systèmes asservis fait actuellement l'objet de très nombreux travaux qui participent de domaines très divers (théoriques, expérimentaux, ou purement techniques).

Le but de ce travail est de faire une étude aussi complète que possible, sous ces différents aspects, d'un système asservi relativement simple. En fait, ces aspects sont constamment mêlés l'un à l'autre et ne peuvent être dissociés ; c'est ainsi que les différentes études qui seront présentées sont à la fois théoriques (mises en équations, après d'ailleurs des schématisations plus ou moins justifiées), techniques (construction, montage, assemblage des pièces constitutives), expérimentales (essais et mesures réalisés sur les appareils employés).

Le système asservi que nous nous proposons d'étudier est un asservissement de position, destiné à donner automatiquement et instantanément les coordonnées polaires d'un mobile dont on connaît à chaque instant les coordonnées cartésiennes.

Le plan suivant lequel nous présentons notre travail est le suivant :

- nous présentons d'abord une étude détaillée et autonome de chaque élément constitutif du système ;
- nous présentons ensuite l'étude de l'ensemble du système, d'abord considéré comme l'assemblage de ses divers éléments (étude de caractère théorique), puis considéré comme un tout (étude de caractère technique et expérimental).

Le détail de la présentation et nos conclusions sont les suivantes:

Dans un premier chapitre, nous rappelons brièvement les généralités sur les servomécanismes dont nous aurons besoin dans la suite, en nous plaçant sous l'angle du système particulier que nous considérons. Puis nous présentons le système asservi à étudier : but à réaliser, principe de fonctionnement, chaînes de puissance et de contrôle, éléments composants (en nous étendant un peu sur le trigonomètre dont le fonctionnement est à connaître pour comprendre celui de l'ensemble), schéma d'assemblage des éléments.

Un second chapitre est consacré à l'étude des éléments constitutifs : le trigonomètre, le moteur, l'amplificateur. Cette étude comprend en principe : la présentation, le principe de fonctionnement et des généralités sur le type d'appareil, la présentation des caractéristiques de l'appareil effectivement utilisé (fourni par un constructeur ou construit au laboratoire), les essais et mesures dont il a été l'objet, des graphiques traduisant ces mesures. Ces mesures nous donnent les valeurs numériques nécessaires à l'expression mathématique de la fonction remplie par cet élément. Elles permettent de tirer des conclusions sur la qualité de ce dernier et par conséquent sur ce qu'on peut attendre de son comportement.

Dans un troisième chapitre, nous rassemblons dans une première partie les résultats précédents et présentons ainsi une étude semi-théorique de l'ensemble ; nous donnons d'abord le schéma fonctionnel de cet ensemble, puis élaborons et étudions sa fonction de transfert. Nous en déduisons tout ce qu'une telle étude peut nous fournir sur le comportement du système, c'est-à-dire les prévisions que l'on pourrait faire sur la marche de ce système avant de le construire; ces prévisions sont naturellement entachées d'une assez forte erreur, d'importantes schématisations ayant été faites en cours de route. Dans la seconde partie de ce troisième chapitre, nous présentons la construction de l'appareil complet réalisée au laboratoire, les essais et mesures auxquels nous l'avons soumis, les modifications que nous avons été amenés à introduire. Nous analysons et tentons d'expliquer les divergences que nous constatons avec les résultats de la partie précédente.

Nous avons arrêté notre travail d'amélioration lorsque les performances de l'appareil nous ont paru satisfaisantes, compte tenu des imperfections analysées précédemment des différents éléments. Notre système a une bonne stabilité et une précision satisfaisante; ces qualités demeurent du même ordre de grandeur que toute position du mobile dans le plan (sauf toutefois trop au voisinage de l'origine). Ce résultat a été obtenu en menant de front à la fois les études théoriques et les études expérimentales, en menant de front à la fois les études par éléments et les études de l'ensemble, et en analysant et en essayant d'interpréter correctement les divergences entre ces études théoriques et expérimentales.

Je tiens à remercier Monsieur Rémond qui non seulement m'a fourni le sujet de ce travail, mais encore m'a prodigué ses conseils et m'a fait bénéficier de son expérience.

CHAPITRE PREMIER

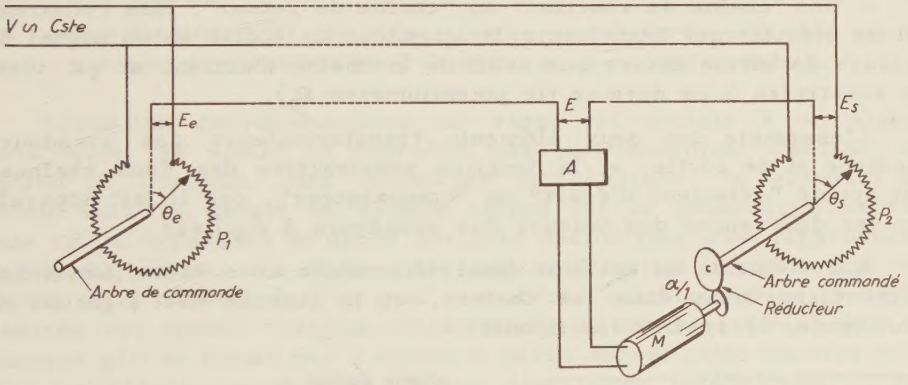
GÉNÉRALITÉS SUR L'ÉTUDE DES SERVOMÉCANISMES

PRÉSENTATION DU SYSTÈME ASSERVI A ÉTUDIER

1 - Représentation d'un servomécanisme par son schéma fonctionnel

Pour étudier le fonctionnement d'un servomécanisme, on représente d'abord le système par un schéma simplifié appelé "schéma fonctionnel". Celui-ci représente la fonction de chaque élément et la transmission des signaux entre deux éléments consécutifs. Chaque fonction est représentée par un rectangle. Il se peut qu'un organe ait plusieurs fonctions déterminées, auquel cas il est schématisé par plusieurs rectangles. Le sens de la transmission des signaux est traduit par des flèches placées sur les lignes reliant les rectangles.

Prenons l'exemple simple d'un asservissement de recopie angulaire représenté ci-dessous.



L'appareil est destiné à reproduire en un lieu éloigné la position angulaire d'un "arbre de commande", cette position pouvant varier de façon quelconque au cours du temps. L' "arbre commandé" doit suivre les variations de la commande pour recopier avec le moins d'écart possible sa position à chaque instant.

Le principe est le suivant :

- Un potentiomètre P_1 transforme la position angulaire θ_e de l'arbre de commande en une tension E_e qui est proportionnelle à cette position. On appelle cette tension "grandeur de référence" du servomécanisme.

- Un second potentiomètre P_2 transforme la position angulaire θ_s de l'arbre commandé en une tension E_s proportionnelle à cette position.

Les deux potentiomètres sont alimentés par la même source de tension constante.

- La tension $E = E_e - E_s$, appelée "tension d'erreur" ou "signal de correction", est amplifiée pour commander la rotation d'un moteur biphasé M. Celui-ci est relié à l'arbre de sortie par l'intermédiaire d'un réducteur de vitesse de rapport $1/\alpha$. Lorsque θ_s est différent de θ_e, E_s est différent de E_e, et le moteur fait tourner l'arbre commandé dans un sens tel que θ_s se rapprochant de θ_e, E diminue pour finalement s'annuler. Le moteur s'arrête alors pour $\theta_s = \theta_e$.

Cet exemple est caractérisé, comme tous les servomécanismes, par la présence d'éléments ou de chaînes d'éléments aux fonctions bien déterminées :

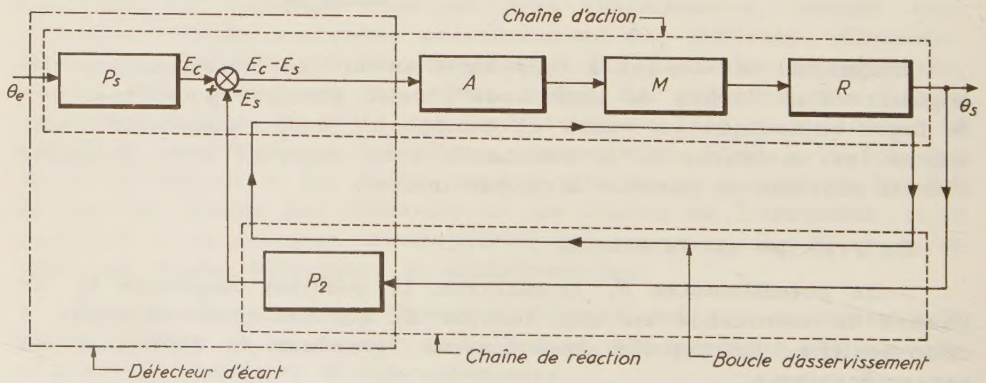
- Une "chaîne d'action" ou "chaîne de puissance", qui comprend :

- un élément qui transforme la grandeur d'entrée en un signal de mesure (le potentiomètre P_1),
- un élément amplificateur (préamplificateur de tension + amplificateur de puissance),
- un élément d'exécution de l'ordre, qui agit sur l'organe commandé (le servomoteur),

- Une "chaîne de réaction" ou "chaîne de retour". Elle comprend ici un élément qui transforme la grandeur de sortie en un signal de mesure de même nature que celui de la chaîne d'action, et qui vient se soustraire à ce dernier (le potentiomètre P_2).

L'ensemble des deux éléments transformateurs des grandeurs d'entrée et de sortie, et la jonction soustractive des deux chaînes, est appelé "détecteur d'écart" ou "comparateur", car il fait apparaître les différences des valeurs des grandeurs à égaliser.

Les éléments du système étant déterminés avec leurs fonctions, leurs dispositions dans les chaînes, et la marche des signaux, on peut tracer le schéma fonctionnel



2 - Relation entre les grandeurs d'entrée et de sortie

Le schéma fonctionnel d'un servomécanisme nous donne une vue d'ensemble de son fonctionnement. Pour étudier ce dernier, on écrit les relations qui expriment la valeur d'une variable intermédiaire en fonction de celle qui la précède dans la chaîne. On applique à chaque fonction les équations qui la régissent : lois de la Mécanique, lois de l'Electricité... En opérant ainsi de proche en proche, on arrive à obtenir la relation fonctionnelle (R) entre la grandeur de sortie $s(t)$ et la grandeur d'entrée $e(t)$. Cette relation fonctionnelle, qui relie les dérivées jusqu'à certains ordres de s et e, et les conditions initiales, définissent $s(t)$ en fonction de $e(t)$.

Nous nous bornerons à l'étude d'un servomécanisme "linéaire", ainsi appelé par définition lorsque l'équation différentielle (R) est linéaire et à coëfficients constants. Un système physique n'est pratiquement jamais linéaire ; on peut le considérer comme tel en faisant des hypothèses quant aux qualités des organes constituants. Lorsque cela est impossible, le système est dit "non-linéaire", et l'étude théorique est différente et plus difficile.

Dans le cas linéaire, l'équation (R) donne une réponse $s(t)$ qui est la somme de deux fonctions :

- une fonction $g(t)$, somme d'exponentielles à exposants complexes, qui est la solution de l'équation sans second membre ;
- une fonction $h(t)$, de même forme que l'entrée $e(t)$, qui est la solution particulière de l'équation avec second membre.

Lorsqu'un servomécanisme au repos est soumis à un signal quelconque, sa sortie ne reproduit pas instantanément l'entrée ; en raison de l'inertie, tant mécanique qu'électrique, la grandeur de sortie aura au départ un certain retard sur la grandeur d'entrée, puis elle la dépassera et après quelques oscillations s'en rapprochera asymptotiquement. Le régime qui sépare l'instant d'application du signal et l'instant où l'on peut considérer que la sortie recopie l'entrée est appelé "régime transitoire". Il est caractérisé par la fonction $g(t)$ et limité par l'instant à partir duquel cette fonction peut être considérée comme nulle ; il peut donc durer indéfiniment : c'est le cas où les exposants figurant dans les exponentielles ont une partie réelle positive ou nulle. Dans le cas contraire, le régime transitoire peut être considéré comme terminé à un certain instant : la sortie recopie alors formellement l'entrée, à un retard ou à un déphasage près. On a alors le régime définitif ou "régime forcé". Il est caractérisé par la fonction $h(t)$. Dans ce cas, le système est dit "stable".

La grandeur d'entrée $e(t)$ est le plus souvent une fonction quelconque du temps, et son caractère aléatoire ne permet pas de la faire entrer sous forme explicite dans l'équation (R). Aussi lui donne-t-on pour l'étude théorique aussi bien que pour l'étude expérimentale, des valeurs qui sont des fonctions simples du temps.

Citons :

- le signal en échelon de grandeur $e(t) = A\,u(t)$
- le signal en échelon de vitesse $e(t) = A\,t\,u(t)$
- le signal harmonique $e(t) = A\,u(t)\sin(\omega t + \varphi)$

avec A = Cste, $u(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$, $u(t) = 1$ pour $t > 0$

Ces types de grandeurs d'entrée sont choisis par commodité de résolution de l'équation (R) et parce qu'ils sont faciles à réaliser physiquement pour les essais pratiques du système.

3 - Fonction de transfert

Dans l'étude précédente, nous n'avons donné que des indications qualitatives sur le phénomène qui se produit. Lorsqu'il s'agit d'obtenir des indications quantitatives, on a alors à étudier l'équation (R).

Lorsque cette équation (linéaire et à coefficients constants) est d'un ordre faible (second ordre), on peut étudier directement le comportement du servomécanisme sans donner la forme explicite de la solution, par le simple examen de ses coefficients. Lorsqu'elle est d'un ordre plus élevé, on utilise habituellement le calcul opérationnel.

L'équation (R) devient par transformation de Laplace une équation algébrique par rapport à la variable complexe p, reliant les images $S(p)$ et $E(p)$ de $s(t)$ et $e(t)$. Cette équation contient les conditions initiales et fournit directement l'image de la solution de (R) correspondant à ces conditions initiales.

Si l'on suppose $e(t)$ et ses dérivées nulles pour t négatif ou nul, et $s(t)$ et ses dérivées nulles pour $t = 0$, l'équation (R) devient :

$$(B_n p^n + B_{n-1} p^{n-1} + \cdots\cdots + B_o)\, S(p) = (A_m p^m + A_{m-1} p^{m-1} + \ldots + A_o)\, E(p),$$

et on appelle par définition "fonction de transfert" (F.T.) ou "transmittence" du servomécanisme le rapport :

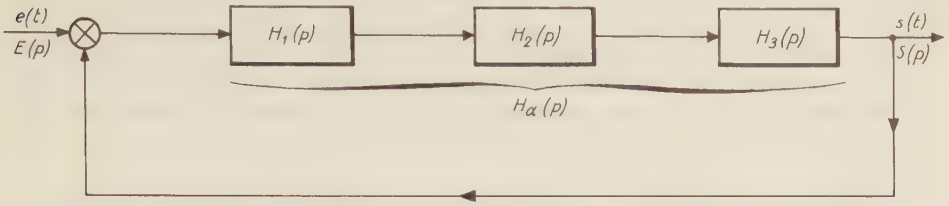
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A_m p^m + \cdots\cdots + A_o}{B_n p^n + \cdots\cdots + B_o}$$

Cette notion est fondamentale car le comportement du système asservi est complètement caractérisé par sa fonction de transfert.

Le calcul opérationnel est en général utilisé dès le début de l'étude : on détermine d'abord la fonction de transfert de chaque "rectangle" du schéma fonctionnel; la fonction de transfert d'une chaîne de rectangles est égale au produit des fonctions de transfert des rectangles, dans le cas d'entrées et de sorties à une seule dimension, et lorsque chaque élément n'influe pas sur le comportement de celui qui le précède dans la chaîne.

On est amené à considérer deux types de fonctions de transfert.

Prenons le schéma fonctionnel suivant, où chaque rectangle est affecté de la fonction de transfert qui le caractérise, H(p).



Il n'y a pas de "rectangle" dans la chaîne de retour et un tel asservissement est dit à "retour unitaire". La grandeur de sortie est ramenée à l'entrée pour être comparée à la grandeur d'entrée.

On appelle "fonction de transfert en boucle fermée" $H_f(p)$ le rapport $\frac{S(p)}{E(p)}$, que l'on calcule égal à $\frac{H_o(p)}{1 + H_o(p)}$, où $H_o(p)$ est la fonction de transfert de la chaîne d'action seule.

On appelle "fonction de transfert en boucle ouvert" le rapport $H_o(p) = \frac{S(p)}{E(p) - S(p)}$, égal à $H_o(p)$.

On obtient donc directement la fonction de transfert en boucle fermée d'un asservissement à retour unitaire à partir de sa fonction de transfert en boucle ouverte H (p) par la formule :

$$H_f(p) = \frac{H_o(p)}{1 + H_o(p)}$$

La notion de fonction de transfert en boucle ouverte est importante car on peut étudier grâce à elle la stabilité du système, sans avoir recours à la fonction de transfert en boucle fermée, d'expression plus compliquée.

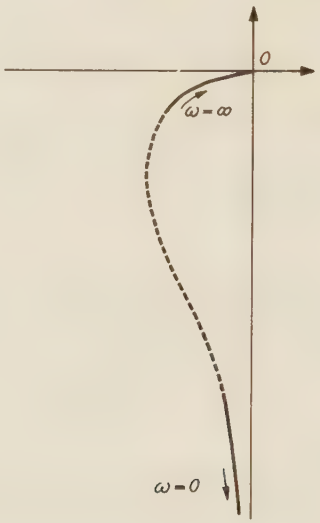
La fonction de transfert d'un asservissement est une fonction de la variable complexe p, dont le module est le gain du système (rapport entre les amplitudes des grandeurs de sortie et d'entrée), et dont l'argument est le déphasage entre les grandeurs de sortie et d'entrée.

On utilise aussi la notion de "gain statique" : on écrit la fonction de transfert en boucle fermée sous la forme K G(p), où G(p) est égal à 1 pour la fréquence zéro (régime statique), et où K, nombre indépendant de p, représente le gain statique.

Pour l'étude pratique d'un servomécanisme, on est amené à le supposer soumis à des entrées harmoniques de pulsation déterminée ω, ce qui revient à prendre pour p la valeur imaginaire pure $j\omega$. La fonction de transfert est alors un nombre complexe fonction de ω et on utilise les représentations graphiques suivantes :

a) Le "lieu de transfert" ou "lieu de Nyquist", qui est le lieu dans le plan complexe des points d'affixe $H(p)$, pour ω variant de θ à $+\infty$. On peut distinguer le lieu de transfert en boucle ouverte et le lieu de transfert en boucle fermée, celui-ci pouvant d'ailleurs être déduit du précédent par une construction géométrique simple. Pour le lieu de transfert en boucle ouverte, on est amené à considérer le lieu "complet" obtenu en faisant varier ω de $-\infty$ à $+\infty$; comme la fonction de transfert est une fonction rationnelle à coefficients réels, le lieu des points correspondant à $\omega < 0$ se déduit du lieu correspondant à $\omega > 0$ par symétrie par rapport à l'axe réel.

La portion du lieu de transfert en boucle ouverte voisine de l'origine correspond presque toujours aux fréquences infinies. Cela tient au fait qu'en général le degré du dénominateur est supérieur au degré du numérateur.



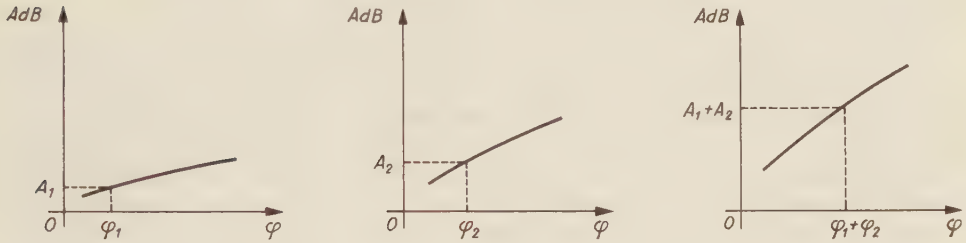
Considérons un système du second ordre (degré du dénominateur - degré du numérateur = 2), qui a par exemple une fonction de transfert en bouche ouverte de la forme $\frac{a}{p+bp^2}$, que l'on écrit $\frac{a}{p(1+\tau p)}$ de façon à mettre en évidence la constante de temps τ. Il se comporte aux hautes fréquences comme $\frac{a}{\tau p^2}$, et le lieu arrive tangentiellement à l'axe réel négatif. Aux très basses fréquences, la même fonction de transfert se comporte comme a/p et le lieu de transfert admet l'axe imaginaire négatif comme direction asymptotique.

b) La courbe de gain, courbe représentative du gain en fonction de la fréquence. Le gain est mesuré en décibels, c'est-à-dire exprimé par $20 \log[H(j\omega)]$; en abscisse, on porte soit la fréquence, soit le logarithme de la fréquence.

c) La courbe de phase, courbe représentative du déphasage en fonction de la fréquence. La phase est mesurée en degrés; en abscisse on porte soit la fréquence, soit le logarithme de la fréquence.

d) Le "lieu de Black", courbe représentative du gain en fonction de la phase (gain en décibels, phase en degrés); cette courbe se déduit des précédentes par lecture directe; elle présente deux avantages pour le calcul pratique des systèmes asservis :

- un changement du gain statique du système se traduit simplement par une translation parallèle à l'axe des ordonnées ;
- le produit de plusieurs fonctions de transfert se traduit par deux simples additions vectorielles portant la première sur les phases $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ correspondant à une valeur donnée de ω, la seconde sur les ordonnées correspondantes.



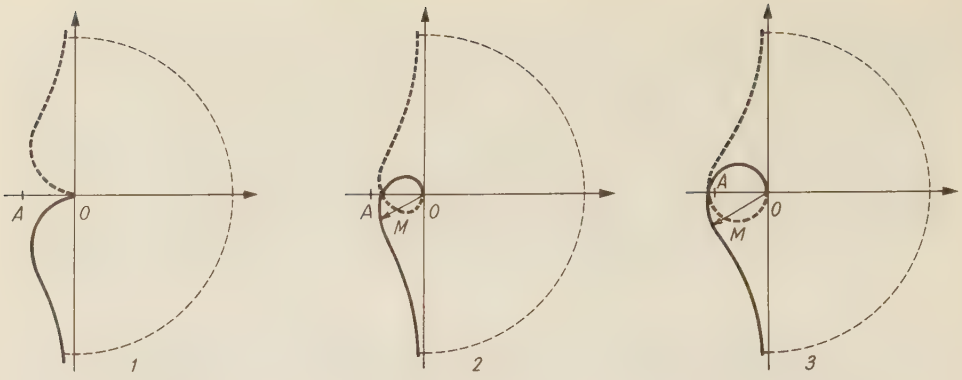
Pour les différentes études du servomécanisme, on choisit celle de ces représentations qui met le mieux en évidence la qualité étudiée : lieu de transfert en boucle ouverte pour la stabilité, courbe de gain pour la résonnance, etc.

4 - Stabilité

Nous nous bornerons à l'étude de la stabilité d'un système à boucle unique, c'est-à-dire qui ne comporte pas de boucle secondaire dans la chaîne d'asservissement. Pour un tel système on utilise deux critères principaux :

- un critère algébrique, le critère de Routh, qui permet de voir si l'équation algébrique en p transformée de (R) a toutes ses racines à partie réelle positive, sans résoudre cette équation,
- un critère graphique, le critère de Nyquist simplifié, qui s'applique au lieu de transfert complet en boucle ouverte : un système asservi à boucle unique est stable si son lieu de transfert complet en boucle ouverte n'entoure pas le point A d'affixe -1, appelé point critique.

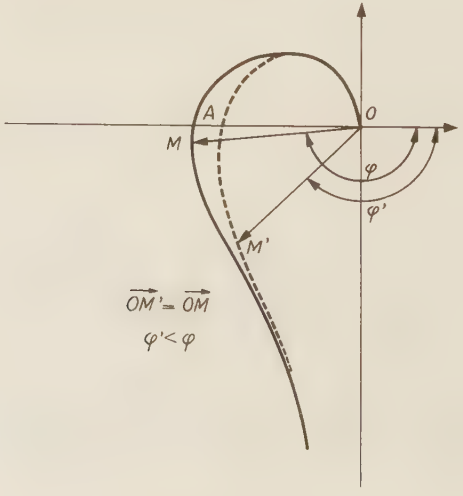
Ainsi pour un système du second ordre, on aura le graphique 1 ci-après, qui montre que le système est toujours stable. Pour un système du troisième ordre, on aura l'un ou l'autre des graphiques 2 et 3 ci-après.



La stabilité d'un tel système dépend de son gain (grandeur du vecteur $\overrightarrow{OM}$). Si celui-ci est supérieur à 1 pour la pulsation correspondant à $\varphi = -\pi$, le système est instable.

En conclusion, on peut dire que la stabilité d'un asservissement d'ordre supérieur à 2 est commandée par le gain. Comme pratiquement on peut faire varier celui-ci facilement (gain d'un amplificateur par exemple), on peut agir grâce à lui sur la stabilité du système. Mais d'autre part, un gain trop faible rend l'asservissement mou et imprécis. Il faut donc choisir une valeur du gain qui assure le maximum de précision et une bonne stabilité.

Sans diminuer le gain dans la même proportion pour toutes les pulsations, une autre façon d'obtenir ces conditions favorables est de placer dans la boucle d'asservissement un réseau correcteur. C'est en général un élément électrique ou mécanique passif dont le rôle est de déformer le lieu de transfert en boucle ouverte pour qu'il n'entoure pas le point A, sans que le gain soit sensiblement diminué dans les autres régions du plan complexe. C'est ce qu'on appelle "compenser" le système. Le graphique suivant montre un exemple de compensation par avance de phase.



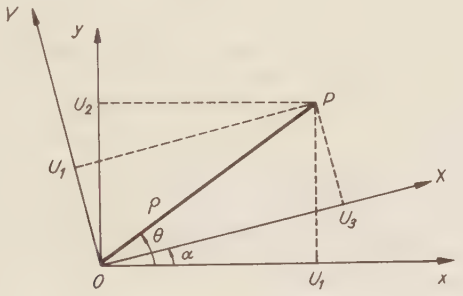
5 - But du système asservi à étudier

Le but du système asservi que nous nous proposons d'étudier est d'obtenir de façon instantanée les coordonnées polaires d'un mobile décrivant dans un plan une trajectoire quelconque et dont on connaît à chaque instant les coordonnées cartésiennes.

Soit xOy le système d'axes de coordonnées; il s'agit de réaliser un système physique élaborant à chaque instant la distance ρ qui sépare le mobile M de l'origine, ainsi que l'angle θ que fait le vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe des x.

6 - Principe

Les coordonnées cartésiennes x et y sont introduites sous la forme de deux tensions sinusoïdales u_1 et u_2 de même pulsation ω et de valeurs efficaces U_1 et U_2 respectivement proportionnelles à x et à y. Considérons le vecteur $\overrightarrow{OP}$ qui a pour composantes U_1 et U_2 sur les axes Ox et Oy, et un système d'axes mobiles XOY déduit de xOy par la rotation α. Les composantes de $\overrightarrow{OP}$ sur ces nouveaux axes sont deux tensions sinusoidales u_3 et u_4 de pulsation ω et de valeurs efficaces U_3 et U_4. Le passage de (U_1, U_2) à (U_3, U_4) est réalisé par un appareil appelé trigonomètre (resolver), dont le rotor matérialise les axes XOY.



L'acte cybernétique qui consiste à annuler U_4 est réalisé par un dispositif d'asservissement qui comporte un amplificateur, un moteur et un réducteur.

Pour U_4 nul, la distance ρ s'obtient par mesure de U_3, et l'angle θ par la mesure de la valeur prise alors par l'angle α.

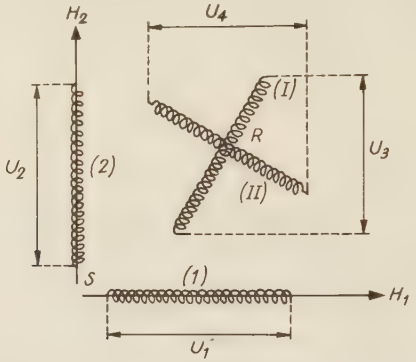
Remarquons que nous avons affaire à un servomécanisme à courant porteur, c'est-à-dire où les signaux d'entrée et de sortie sont les modulations d'amplitude de tensions sinusoïdales.

Nous présentons à présent de façon détaillée les deux organes essentiels du servomécanisme : le trigonomètre et le dispositif d'asservissement.

7 - Le trigonomètre

Cet appareil comprend :

- un stator S, formé de deux enroulements (1) et (2), bobinés à angle droit l'un de l'autre ;
- un rotor cylindrique R, formé de deux enroulements (I) et (II), bobinés également à angle droit l'un de l'autre.



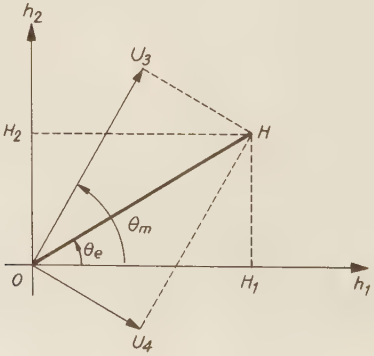
Les bobines du stator sont alimentées par les deux tensions u_1 et u_2. Le dispositif d'alimentation, que nous étudierons plus loin, impose par construction un déphasage multiple de $\pi/2$ à ces tensions.

Ces deux bobines créent deux champs h_1 et h_2 rectangulaires de valeurs efficaces H_1 et H_2, qui sont également sinusoïdaux, de même pulsation ω, déphasés d'un multiple de $\pi/2$, et également proportionnels à x et y.

Les enroulements du rotor sont le siège de phénomènes d'induction de la part de h_1 et h_2 et on recueille à leurs bornes deux tensions induites u_3 et u_4, fonctions de la position du rotor par rapport au stator.

Lorsque x et y varient, les tensions u considérées ont une amplitude variable; mais pour la commodité de l'étude, nous supposerons d'abord que les amplitudes de u_1 et u_2 sont constantes (le point M est immobilisé sur sa trajectoire).

Les champs et les tensions induites sont représentés par le graphique suivant :



Le champ h résultant de la composition de h_1 et h_2 est porté par un axe fixe ; il est sinusoïdal de pulsation ω. Sa valeur efficace H est reliée à ρ avec le même coefficient de proportionnalité K qui relie H_1 et H_2 à x et y :

$$\text{si} \quad H_1 = Kx \quad \text{et} \quad H_2 = Ky, \quad \text{on a} \quad H = K\rho .$$

La direction du champ h fait avec Ox l'angle θ_e, qu'on appellera l' "angle électrique", puisqu'il résulte des tensions u_1 et u_2. θ_e est égal à l'angle θ, coordonnée polaire recherchée que l'on veut matérialiser.

Supposons que l'enroulement (I) du rotor fasse avec Ox (axe de l'enroulement (1) du stator) l'angle θ_m, qu'on appellera l' "angle mécanique".

Les valeurs efficaces des tensions induites aux bornes des enroulements du rotor sont :

$$\text{pour (I)} \ : U_3 = k_r (U_1 \cos \theta_m + U_2 \sin \theta_m),$$

$$\text{pour (II)} \ : U_4 = k_r (U_1 \sin \theta_m - U_2 \cos \theta_m)$$

en introduisant un coefficient de proportionnalité k_r qui devrait être égal à un, mais qui dépend en fait de l'appareil utilisé; celui-ci peut être assimilé à un transformateur dont les tensions au primaire sont u_1 et u_2, et les tensions au secondaire u_3 et u_4; les tensions induites ne dépendent pas seulement de la position du secondaire, mais aussi du nombre de spires de chaque enroulement. D'où le coefficient k_r, véritable "rapport de transformation".

Nous introduirons les notions de "distance électrique" et "distance mécanique". La "distance électrique" ρ_e est une tension fictive représentative de ρ qui apparaîtrait réellement aux bornes de l'enroulement (I) lorsque $U_4 = 0$ si le coefficient k_r était égal à un. Nous verrons que le coefficient du trigonomètre que nous utilisons est inférieur à l'unité. La "distance mécanique" ρ_m est la tension U_3 recueillie réellement aux bornes de l'enroulement (I) lorsque $U_4 = 0$, et que nous mesurons pour établir le rapport $k_r = \frac{\rho_m}{\rho_e}$.

Remplaçons U_1 et U_2 en fonction des coordonnées qu'elles représentent : $x = \rho \cos \theta$; $y = \rho \sin \theta$. On obtient :

$$U_3 = k_r (\rho \cos \theta_e \cos \theta_m + \rho \sin \theta_e \sin \theta_m) = k_r \rho \cos (\theta_m - \theta_e) ;$$
$$U_4 = k_r (\rho \cos \theta_e \sin \theta_m + \rho \sin \theta_e \cos \theta_m) = k_r \rho \sin (\theta_m - \theta_e)$$

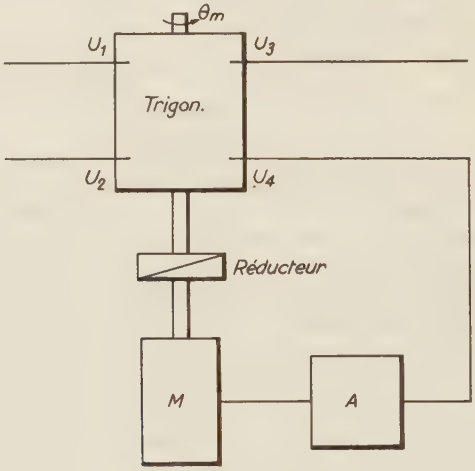
Si on fait tourner le rotor de telle sorte que l'angle mécanique θ_m coïncide avec l'angle électrique θ_e, U_3 est égal à $k_r \rho$ et U_4 est nul. On a θ par la mesure directe de la position angulaire du rotor par rapport à l'axe Ox, celui-ci étant déterminé par le fait que lorsque $\theta = 0$, on mesure $U_3 = U_1$. La lecture se fait sur un cadran gradué fixe, grâce à une aiguille solidaire du rotor.

En même temps qu'un transformateur de tensions, le trigonomètre est donc un détecteur d'écart, puisqu'il délivre une tension de sortie u_4 de valeur efficace proportionnelle à l'écart angulaire $\theta_e - \theta_m$. Cette tension que l'on annule est la tension d'erreur.

8 - Le dispositif d'asservissement

Pour asservir θ_m et U_3 à représenter les coordonnées θ et ρ, on amplifie la tension d'erreur U_4 à l'aide d'un amplificateur électronique A. Cette tension amplifiée commande un petit moteur M. L'arbre de ce dernier attaque un réducteur de vitesse dont l'axe lent entraîne le rotor du trigonomètre. Le montage est tel que l'axe lent du réducteur fait tourner le rotor du trigonomètre dans un sens tel que U_4 diminue. Lorsque celle-ci s'annule, le moteur s'arrête sur une position d'équilibre telle que $\theta_m = \theta_e = \theta$.

Nous pouvons donc présenter le schéma suivant du système asservi dont nous allons entreprendre l'étude.



Cette étude sera divisée en deux parties.

Nous étudierons successivement les différents organes qui constituent le système asservi : trigonomètre, amplificateur, moteur. Il s'agit là d'études à la fois théoriques et expérimentales, qui mettront en évidence les approximations que l'on est obligé de faire et les défauts de ces différents organes.

Ensuite nous ferons l'étude du système complet.

CHAPITRE II

ÉTUDE DES ÉLÉMENTS DU SYSTÈME ASSERVI

1. LE TRIGONOMÈTRE

1 - Analyse des défauts rencontrés dans les trigonomètres

Les trigonomètres, dont nous venons de présenter le principe de fonctionnement idéal, sont des appareils dont l'aspect extérieur est celui d'un petit moteur, et qui présentent fatalement certains défauts par rapport au fonctionnement idéal. Les principaux de ces défauts sont l'imprécision angulaire et la présence de tensions résiduelles.

En tant que comparateur, le trigonomètre joue un rôle fondamental dans le servo-mécanisme. Un asservissement, aussi parfait qu'il soit, ne peut être plus précis que son détecteur d'écart, puisque c'est celui-ci qui commande la grandeur de sortie par l'intermédiaire de la chaîne d'action.

Le trigonomètre commet une erreur dans la détermination de l'angle électrique : l'angle θ_e, que nous avons considéré dans le chapitre précédent comme rigoureusement égal à l'angle θ des coordonnées polaires, en est en fait légèrement différent. Cette erreur traduit les difficultés de fabrication de l'appareil. Un excellent trigonomètre, dont l'erreur angulaire ne dépasse pas 10' de degré pour toutes les positions du rotor et pour toutes les tensions admissibles au stator, exige des tolérances de construction très strictes. Les principales causes de cette erreur sont :

- défaut de position des enroulements du stator l'un par rapport à l'autre (orthogonalité non exacte);
- nombre de tours des enroulements inégaux;
- impédances des enroulements inégales (conducteurs de longueur inégales, de section non constante, non homogènes en résistivité).

Lorsque dans un trigonomètre θ_m est égal à θ_e, la tension U_4 devrait théoriquement être nulle. En fait, elle ne l'est jamais rigoureusement; il existe une tension résiduelle dont la valeur varie avec ρ_e et θ_e. Elle a deux causes principales qui sont la présence d'harmoniques et de composantes en quadrature à la sortie de l'appareil.

La tension résiduelle minimum des meilleurs trigonomètres est de 1 mV par volt d'entrée.

Ainsi, pour pouvoir déterminer la précision du servomécanisme dans lequel entre un trigonomètre, il faut évaluer les imperfections de ce dernier par des essais pratiques.

Mais auparavant il convient de faire la détermination du zéro angulaire. Pour cela, on soumet le stator à deux tensions égales : $U_1 = U_2$; on fait tourner le rotor, et lorsque U_4 est minimum (présence de la seule tension résiduelle), la valeur commune de θ_e et de θ_m doit être de 45°. On cale alors une aiguille solidaire du rotor maintenu immobile, de façon à lire un angle de 45° sur un cadran gradué fixe. Le choix de cette méthode de détermination du zéro est basée sur les deux faits suivants : lorsque les tensions U_1 et U_2 sont égales, la tension résiduelle est minimum car les tensions harmoniques et en quadrature se compensent mutuellement; par suite, l'écart entre l'angle électrique θ_e et l'angle représenté θ est minimum pour cette égalité des tensions et cela assure l'origine la plus correcte des angles.

Pour mesurer le défaut angulaire et le résidu de tension, on soumet le stator à deux tensions telles que ρ_e et θ_e aient des valeurs prescrites (par exemple $\rho_e = 4$ volts, $\theta_e = 15°$). On donne alors à U_1 et U_2 les valeurs correspondantes (3,86 et 1,03 volts pour l'exemple). On mesure la position du rotor pour laquelle U_4 est minimum, et le résidu de tension pour cette position. Puis on calcule $\theta_e - \theta_m$. On fait des séries de mesures en gardant d'abord ρ_e constant et en faisant varier θ_e, puis en donnant à ρ_e différentes valeurs.

Enfin il convient d'effectuer des mesures au sujet du coefficient k_r. Il suffit de mesurer U_3 lorsque U_4 est minimum ; on a $k_r = \frac{U_3}{\rho_e}$.

Pour obtenir une tension de commande du moteur qui soit, comme elle doit l'être, correctement sinusoïdale, il est bon d'assurer un certain débit dans l'enroulement correspondant à U_4, grâce à une résistance de charge. On peut aussi introduire une résistance aux bornes de l'enroulement correspondant à U_3. Ce procédé permet de rendre égaux les rapports de transformation relatifs à U_3 et U_4, et de donner à ce rapport telle valeur numérique que l'on jugera convenable.

2 - Mesures effectuées sur le trigonomètre utilisé

Le trigonomètre que nous utilisons est un appareil Précilec type 45 Mt 20-1. Ses caractéristiques sont les suivantes :

- encombrement : diamètre 45 mm, longueur 70 mm, poids 300 g
- caractéristiques mécaniques :
  couple de frottement du rotor : 5 g/cm
  moment d'inertie du rotor : 28 g/cm

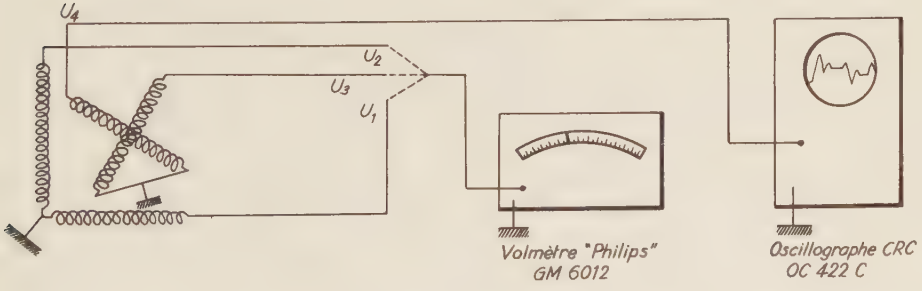
- caractéristiques électriques :
  - primaire stator biphasé
    alimentation 50 périodes/seconde
    tension d'alimentation : 2 à 15 volts par phase
    impédance par phase : 210 ohms
    résistance par phase : 120 ohms
  - secondaire rotor biphasé
    tensions induites maximum par phase : 10 volts
    impédance par phase : 200 ohms
    résistance par phase : 110 ohms

Nous avons procédé à la détermination du zéro angulaire en soumettant le stator aux tensions $U_1 = U_2 = 10$ volts. Nous avons recherché la position du rotor pour laquelle U_4 était minimum, et calé l'aiguille sur 45° dans cette position.

Une résistance de 470 ohms a été placée aux bornes de l'enroulement correspondant à U_3 ; elle nous permet d'obtenir pour k_r la valeur commode 0,5. Les résultats des mesures indiquées ci-dessous montreront les faibles variations de k_r autour de cette valeur. Nous avons placé une résistance de même valeur aux bornes de l'enroulement correspondant à U_4, ce qui permet de constater à l'oscillographe une tension de commande du moteur de forme correcte.

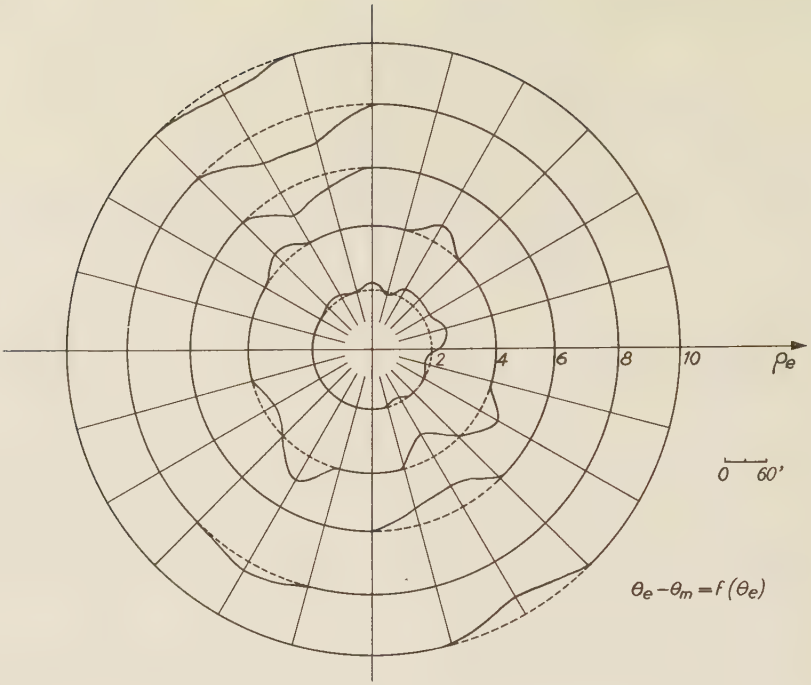
Nous avons alors mesuré l'écart $\theta_e - \theta_m$, le résidu de tension R, la tension U_3, θ_e variant de 15 en 15 degrés de 0 à 360° degrés, et pour les valeurs de ρ_e : 2, 4, 6, 8 et 10 volts. Pour la précision des résultats, les tensions U_1, U_2 et U_3 sont mesurées avec le même voltmètre, un dispositif d'interrupteurs dirigeant vers lui les trois tensions. Le résidu est mesuré en millivolts de crête à crête à l'oscillographe. Pour la mesure des angles, nous disposons d'un cadran gradué en degrés de 96 mm de diamètre. L'aiguille ne porte pas de vernier, mais l'extrémité en est assez mince pour qu'on puisse apprécier le 1/3 de degré.

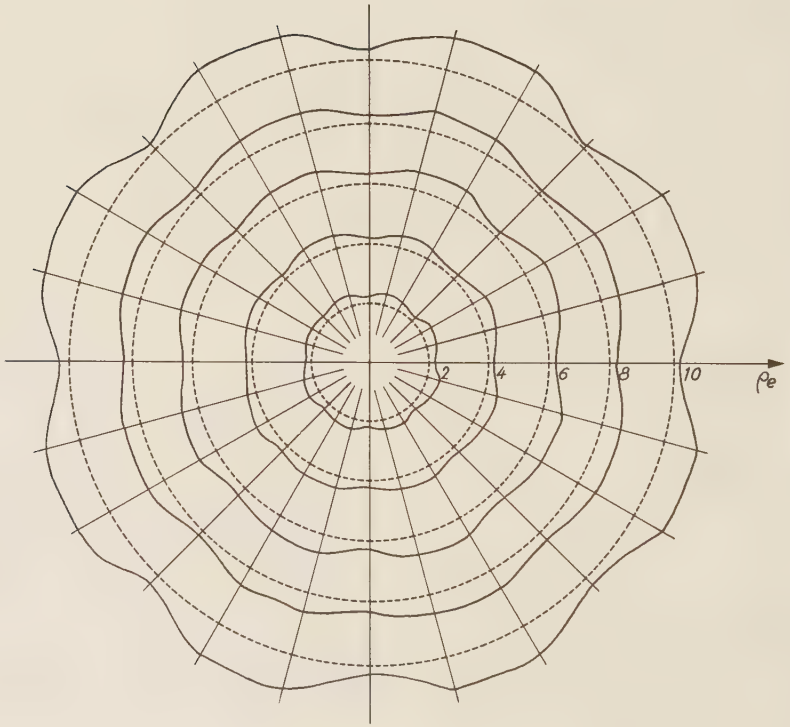
Le schéma du dispositif de mesure est le suivant :

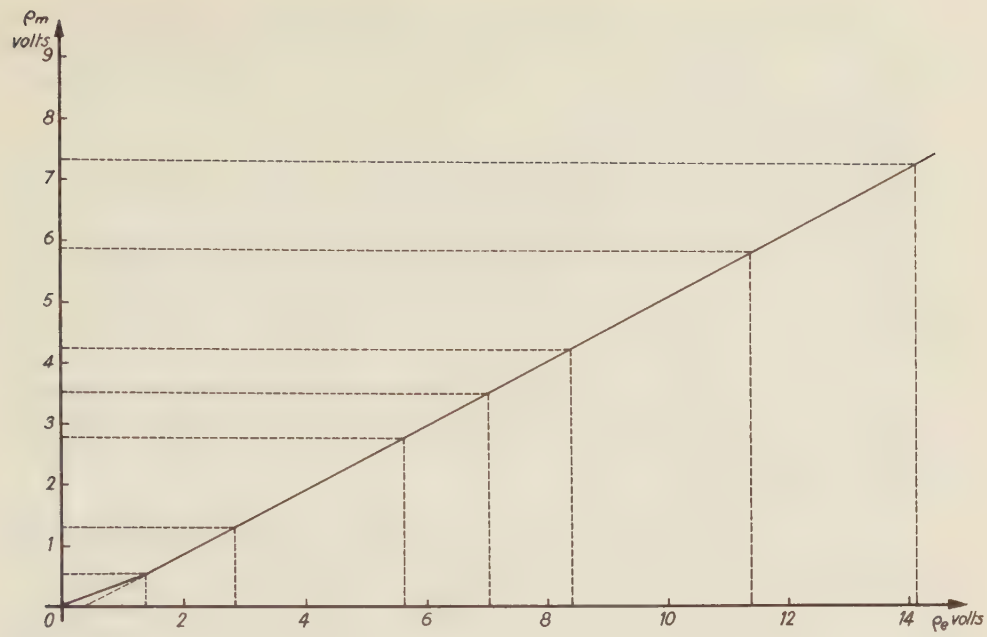


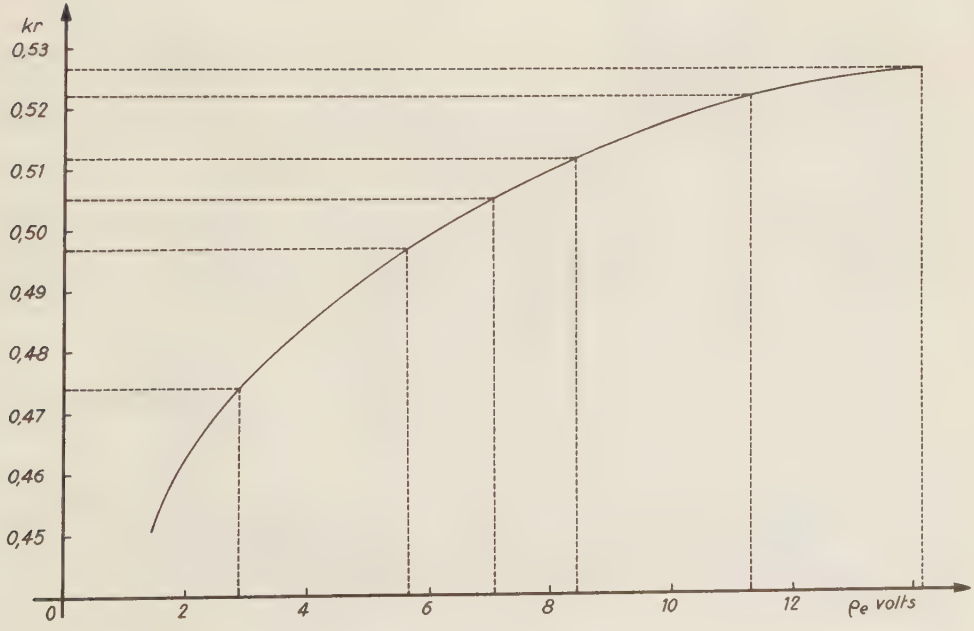
Les résultats obtenus sont rassemblés sur plusieurs graphiques présentés pages 18 et 19.

1) graphique $\theta_e - \theta_m = f(\rho_e)$, pour ρ_e = 2, 4, 6, 8 et 10 volts
2) graphique $R = f(\theta_e)$, pour ρ_e = 2, 4, 6, 8 et 10 volts


2
4
6
8
10
ρ_e
0 60'
$\theta_e - \theta_m = f(\theta_e)$


2
4
6
8
10
ρ_e


ρm
volts
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
2
4
6
8
10
12
14
ρe volts


kr
0,53
0,52
0,51
0,50
0,49
0,48
0,47
0,46
0,45
0
2
4
6
8
10
12
ρe volts

Erreur angulaire et résidu sont portés sur les rayons correspondant aux valeurs de θ_e, à partir du cercle de rayon égal à la valeur de ρ_e considérée :

3) graphique $\rho_m = f(\rho_e)$
4) graphique $k_r = f(\rho_e)$

Le premier graphique nous montre que les écarts $\theta_e - \theta_m$ sont plus grands pour les faibles valeurs de ρ_e que pour les grandes valeurs. En considérant à la fois les deux premiers graphiques, on remarque que l'erreur angulaire est inappréciable et le résidu de tension minimum pour $U_1 = U_2$ ou pour l'une de ces valeurs nulle ($\theta_e = k\pi/4$).

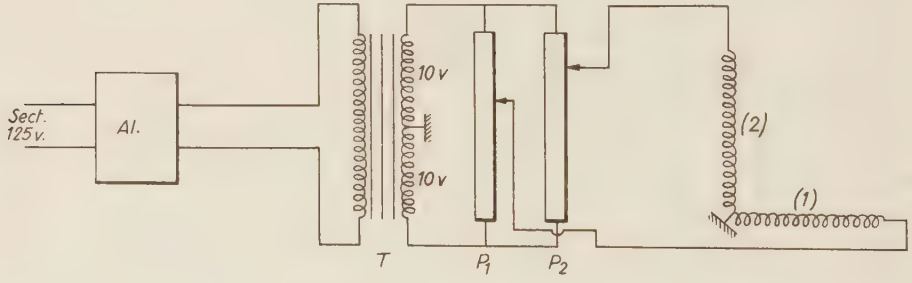
Le troisième graphique montre que ρ_m est une fonction presque linéaire de ρ_e. Cependant, la partie courbe ($\rho_e < 1,5$ volt) met en évidence la non linéarité du phénomène d'induction pour des tensions U_1 et U_2 trop faibles.

Le dernier graphique montre les variations du rapport k_r en fonction de ρ_e, autour de la valeur moyenne 0,5. k_r passe de 0,475 à 0,525 lorsque ρ_e passe de 2 à 14,1 volts. On pourra écrire : $k_r = 0,50 \pm 0,025$. Indiquons d'autre part que les mesures ont montré que k_r ne varie pas en fonction de θ_e de façon appréciable (2 à 3 mV).

D'après ces résultats, on aura intérêt à ne pas travailler trop près de l'origine ($\rho_e < 1$) ; on admettra 45' comme borne supérieure de l'erreur angulaire (le constructeur indique 2° pour ce type d'appareil), et une précision en distance de 1/25. Sans être excellent, le trigonomètre utilisé est suffisamment précis pour le but que nous recherchons.

3 - Dispositif d'alimentation

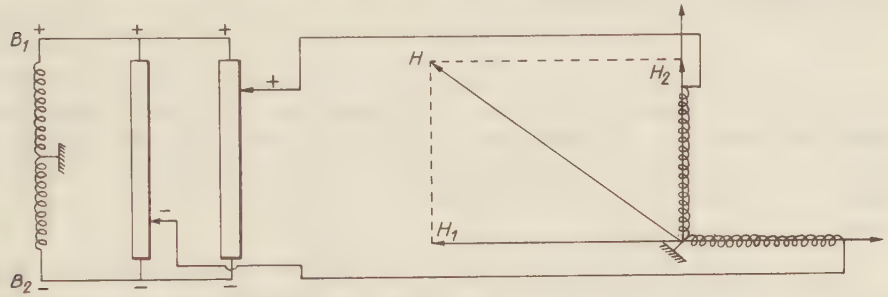
Les enroulements du stator du trigonomètre sont alimentés par le dispositif représenté ci-dessous schématiquement.



Le transformateur T est abaisseur de tension; son secondaire est à point milieu relié à la masse; la tension aux bornes est réglée à 2 x 10 volts par l'alternostat Al. Celui-ci est alimenté par le secteur 125 volts alternatif 50 périodes. Deux potentiomètres P_1 et P_2, branchés en parallèle aux bornes du secondaire du transforma-

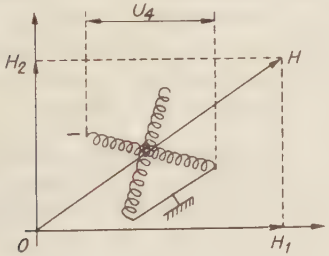
teur, soumettent les enroulements (1) et (2) du stator du trigonomètre aux tensions U_1 et U_2 (représentatives des coordonnées x et y) commandées par la position de leurs curseurs.

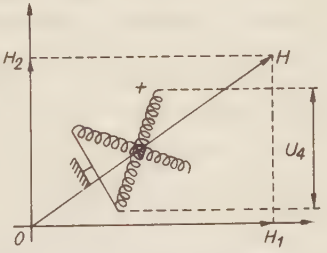
Ce dispositif permet au point M de coordonnées x et y de parcourir tout le plan. Pour le voir, nous supposerons pour fixer les idées la polarité de la borne B du secondaire du transformateur positive, et nous nous bornerons à présenter les positions des curseurs situant le point M dans le deuxième quadrant.



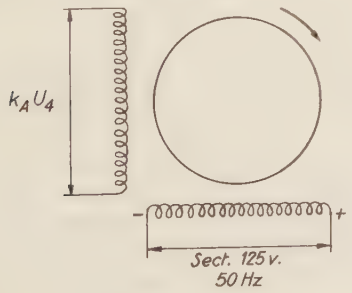
Ceci met en évidence les relations de phase existant entre les tensions U_1 et U_2 : en phase, déphasées de $\pi/4$, $\pi/2$ ou $\pi/4$, suivant le quadrant considéré, et par suite le sens du champ résultant.

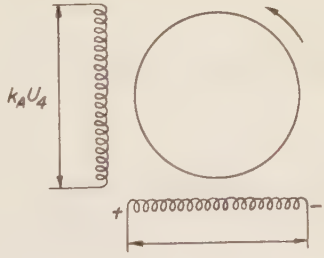
Pour chaque position de ce champ résultant, la tension U_4 induite aux bornes de l'enroulement (II) du rotor présente une certaine polarité selon la position du rotor.





Comme c'est un moteur biphasé qui est commandé par cette tension U_4 amplifiée, le sens de rotation de ce moteur sera déterminé par la relation de phase existant entre cette tension de commande et la tension de référence à laquelle on soumet le second enroulement. C'est cette dernière que l'on inversera au besoin.





II. LE MOTEUR

1 - Principe de fonctionnement

Il s'agit d'un moteur à courant alternatif, du type biphasé à induction. Le stator est formé de deux enroulements inducteurs identiques, décalés de 90° dans l'espace ; il est alimenté par deux courants alternatifs déphasés de $\pi/2$. Le rotor est en forme de cloche, de sorte que son inertie est très faible, et par suite sa constante de temps.

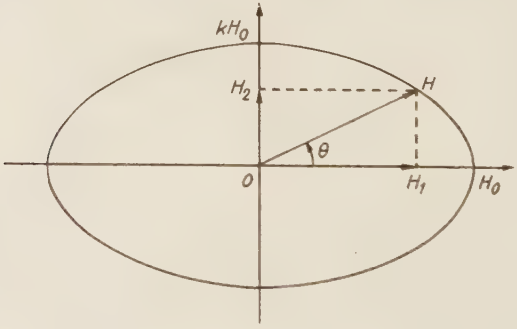
Nous supposerons d'abord que le stator est soumis à deux tensions de même amplitude. Les deux bobinages produisent deux champs orthogonaux tels que :

$$H_1 = H_0 \sin \omega t, \qquad H_2 = H_0 \sin (\omega t + \pi/2) = H_0 \cos \omega t$$

Le champ résultant est représenté par un vecteur tournant de module constant H_0 et de vitesse angulaire ω.

Envisageons maintenant le cas réel d'utilisation du moteur placé dans une chaîne d'asservissement. Un des enroulements est alimenté à tension constante (enroulement et tension de référence) ; l'autre est soumis à la tension $k_A U_4$, de même pulsation que la précédente mais d'amplitude variable, k_A étant le gain de l'amplificateur situé entre le trigonomètre et le moteur (enroulement et tension de contrôle).

Les champs H_1 et H_2 résultants de ces tensions sont toujours orthogonaux et déphasés de $\pi/2$. Si H_0 est l'amplitude du champ H_1 produit par l'enroulement (1) de l'inducteur ($H_1 = H_0 \sin \omega t$), l'amplitude du champ H_2 produit par l'enroulement (2) est kH_0 ($H_2 = k H_0 \cos \omega t$), k compris entre 0 et 1 étant le rapport des tensions d'alimentation.



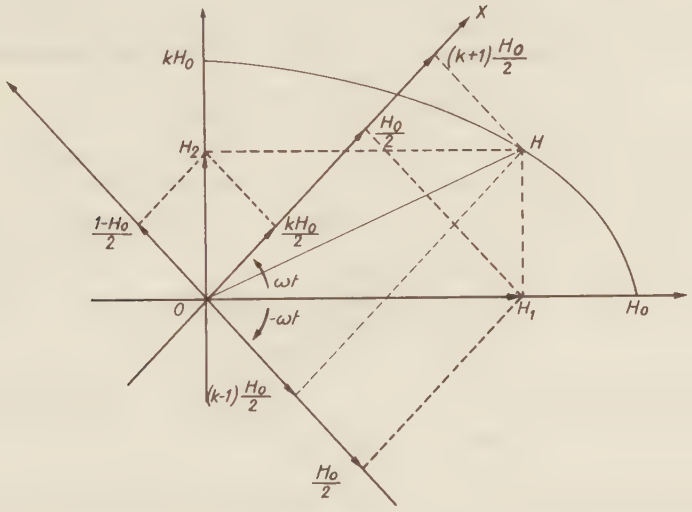
Le champ résultant est un champ tournant elliptique :

$$\frac{H_1^2}{H_0^2} + \frac{H_2^2}{k^2 H_0^2} = 1 ,$$

de vitesse angulaire :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-k\omega \cos^2 \theta}{\sin^2 \omega t}$$

On peut décomposer chacun des champs H_1 et H_2 en deux champs circulaires tournant en sens inverse l'un de l'autre, selon deux axes OX et OY :



Le champ H_1 est décomposé en deux champs de modules $\frac{H_0}{2}$ et de vitesses angulaires $+\omega$ et $-\omega$. Le champ H_2 est décomposé en deux champs de modules $\frac{kH_0}{2}$ et de vitesses angulaires $+\omega$ et $-\omega$.

Le champ elliptique H est ainsi décomposé en deux champs circulaires portés par OX et OY tournant en sens inverse l'un de l'autre à des vitesses égales ($+\omega$ et $-\omega$) et de modules respectifs $(k+1)\frac{H_0}{2}$ et $(k-1)\frac{H_0}{2}$. Ces modules étant inégaux, il y a toujours couple de démarrage.

2 - Détermination de la fonction de transfert d'un moteur biphasé couplé à un réducteur

Le fonctionnement de tout moteur électrique est régi par une relation entre le couple moteur C_m, la tension de commande E et la vitesse du rotor Ω_m : $\Omega_m = f(C_m, E)$. Cette relation est représentée par des courbes paramétriques de paramètre E appelées courbes caractéristiques du moteur.

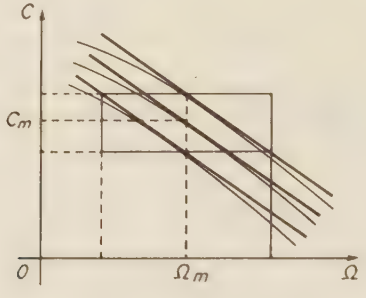
Pour qu'un moteur puisse être représenté par une fonction de transfert linéaire, il faut que la relation ci-dessus soit linéaire et à coefficients constants :

$$\Omega_m = A\, C_m + B\, E, \qquad (1)$$

auquel cas les courbes représentatives forment un réseau de droites parallèles.

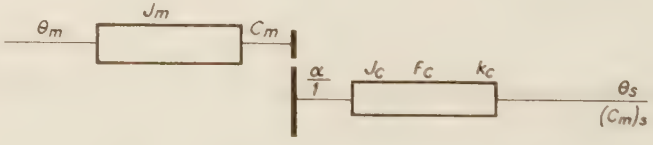
Mais les courbes caractéristiques d'un moteur électrique à courant alternatif sont incurvées. On peut cependant, sans commettre une grande erreur, linéariser dans un certain domaine de vitesse en remplaçant les courbes caractéristiques par un réseau de droites parallèles et en calculant les constantes A et B correspondantes :

$$A = \frac{\partial \Omega_m}{\partial C} \qquad B = \frac{\partial \Omega_m}{\partial E}$$



Pour l'écriture de la fonction de transfert du moteur, il faut faire intervenir le couple résistant sur l'arbre moteur. Or ce dernier est relié à la charge par un réducteur. C'est la raison pour laquelle on ne dissocie pas ces éléments pour leur étude. Ceci est d'autant plus nécessaire pour nous que c'est la position de l'arbre du trigonomètre (donc de l'arbre de sortie du réducteur) qui nous intéresse.

Supposons que l'arbre moteur (position angulaire θ_m) soit relié à l'arbre de la charge (position angulaire θ_s) par un réducteur de rapport $\alpha = \frac{\theta_m}{\theta_s}$.



Soit J_m l'inertie du moteur, J_c l'inertie de la charge sur l'arbre de sortie. On néglige l'inertie du réducteur, très petite devant les précédentes. Soit f_c le coefficient de frottement visqueux sur l'arbre de sortie, et k_c le coefficient de rappel de l'arbre de sortie.

Les équations suivantes sont écrites en transformées de Laplace.

Le couple résistant sur l'arbre de sortie est :

$$C_r = (J_c p^3 + f_c p + k_c)\ \theta_s + J_m p^2 \alpha^2 \theta_s .$$

Appelons $J = J_c + \alpha^2 J_m$ l'inertie totale ramenée sur l'arbre de sortie :

$$C_r = (J p^2 + f_c p + k_c)\ \theta_s \qquad (2)$$

Ecrivons l'égalité du couple résistant et du couple moteur ramené à l'arbre de sortie :

$$(C_m)_s = C_r \qquad (3)$$

Les équations (1), (2) et (3) donnent la fonction de transfert de notre chaîne :

$$H(p) = \frac{\theta_s(p)}{E(p)} = \frac{\alpha B}{-AJp^2 + (\alpha^2 - Af_c)p - k_c A}$$

Dans le cas particulier de notre asservissement, le couple de rappel est nul et le coefficient de frottement visqueux négligeable.

Finalement, la fonction de transfert de l'ensemble est :

$$H(p) = \frac{\theta_s(p)}{E(p)} = \frac{\frac{1}{\alpha} B}{p\left(1 - \frac{J}{\alpha^2} Ap\right)}$$

En écrivant $H(p)$ sous la forme $\frac{a}{p(1 + Sp)}$, on met en évidence la constante de temps du système $\sigma = \frac{J}{\alpha^2}|A|$, qui se trouve être la constante de temps du moteur seul, après l'élimination de f_c et k_c.

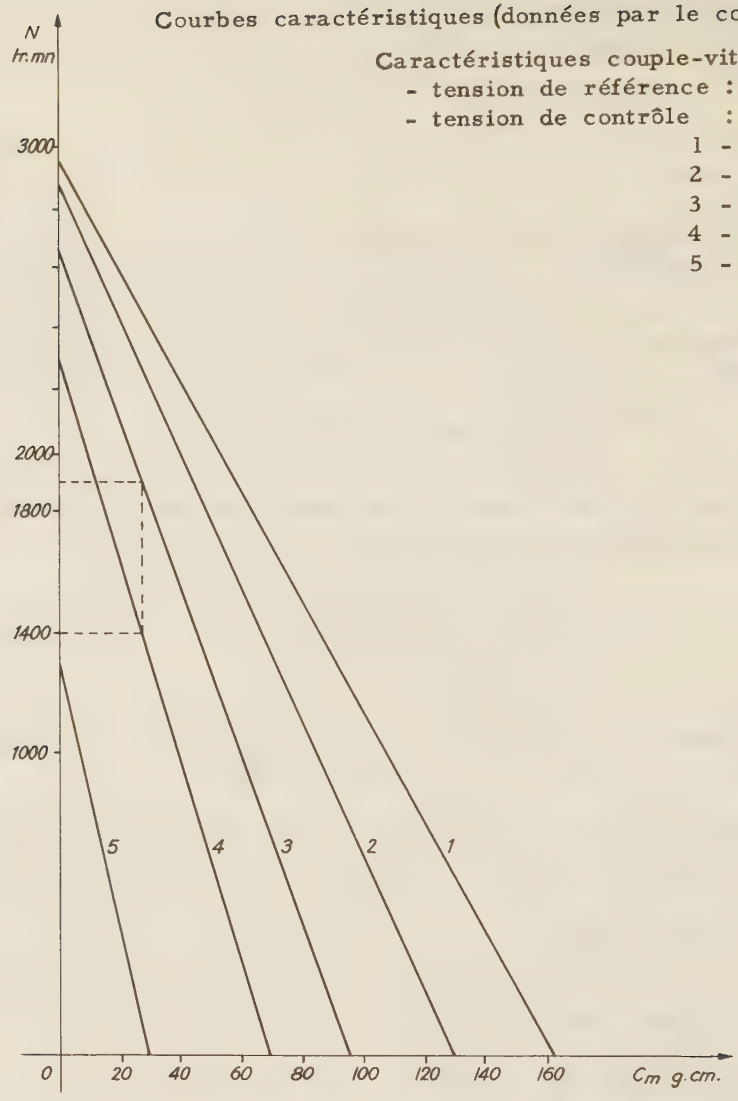
3 - Cas du moteur utilisé

Le moteur dont nous disposons est un moteur biphasé d'asservissement Précilec type 45 Mh 21-6. Ses caractéristiques principales sont les suivantes :

- encombrement : diamètre 45 mm, longueur 70 mm, poids 280 g
- caractéristiques mécaniques :
  - moment d'inertie du rotor : 7 g. cm²
  - vitesse à vide : 2950 tr/mn
  - accélération théorique : 22 400 rd/s².
  - constante de temps : 0,014 s
- caractéristiques électriques :
  - fréquence : 50 Hz. Nombre de pôles : 2
  - tension ..... phase fixe : 125 v
    phase de contrôle : 125 v
  - puissance absorbée à l'arrêt ... phase fixe : 7,8 W
    phase de contrôle : 7,8 W
  - tension de démarrage à vide ... phase fixe : 125 v
    phase de contrôle : 3 v

Courbes caractéristiques (données par le constructeur)

Caractéristiques couple-vitesse :
- tension de référence : 125 volts
- tension de contrôle :
  1 - 125 volts
  2 - 100 volts
  3 - 75 volts
  4 - 50 volts
  5 - 25 volts



L'utilisation de la fonction de transfert de l'ensemble moteur-réducteur exige que l'on connaisse les valeurs numériques de A, B, J et α.

J est égal à $J_c + \alpha^2 J_m$; les moments d'inertie des rotors du trigonomètre et du moteur sont respectivement égaux à 28 g. cm^2 et 7 g. cm^2. Comme le réducteur employé est de rapport 1/50, on pourra négliger J_c devant $\alpha^2 J_m$ et écrire : $J = \alpha^2 J_m$.

D'où : $$H(p) = \frac{\frac{1}{\alpha} B}{p\,(1 - A J_m p)}$$

Les caractéristiques couple-vitesse données par le constructeur sont linéaires, mais ne sont pas à gradient constant par rapport à E. Comme E peut, dans notre montage, couvrir la variation totale autorisée (0 à 125 volts), nous choisirons pour A et B des valeurs qui correspondent aux valeurs moyennes de E, soit 50-75 volts.

On trouve à partir du réseau des caractéristiques :

$$A = \frac{\partial \Omega_m}{\partial C_m} = \frac{2300}{70} \cdot \frac{2\pi}{60} \cdot \frac{1}{980} = 3{,}28.10^{-3} \text{ un. CGS}$$

$$B = \frac{\partial \Omega_m}{\partial E} = \frac{500}{25} \cdot \frac{2\pi}{60} = 2{,}1$$

La constante de temps du moteur, égale à AJ_m vaut dans ces conditions :

$$\tau = 7 \times 3{,}28.10^{-3} = 0{,}023 \text{ s} .$$

La constante de temps indiquée par le constructeur (0,014 s.) correspond à la caractéristique E = 125 volts, dont la pente est plus faible que celle de la caractéristique employée ci-dessus (E = 50 volts).

On prendra finalement :

$$H(p) = \frac{2{,}1}{50\,p\,(1 + 1{,}023\,p)}$$

III. L'AMPLIFICATEUR

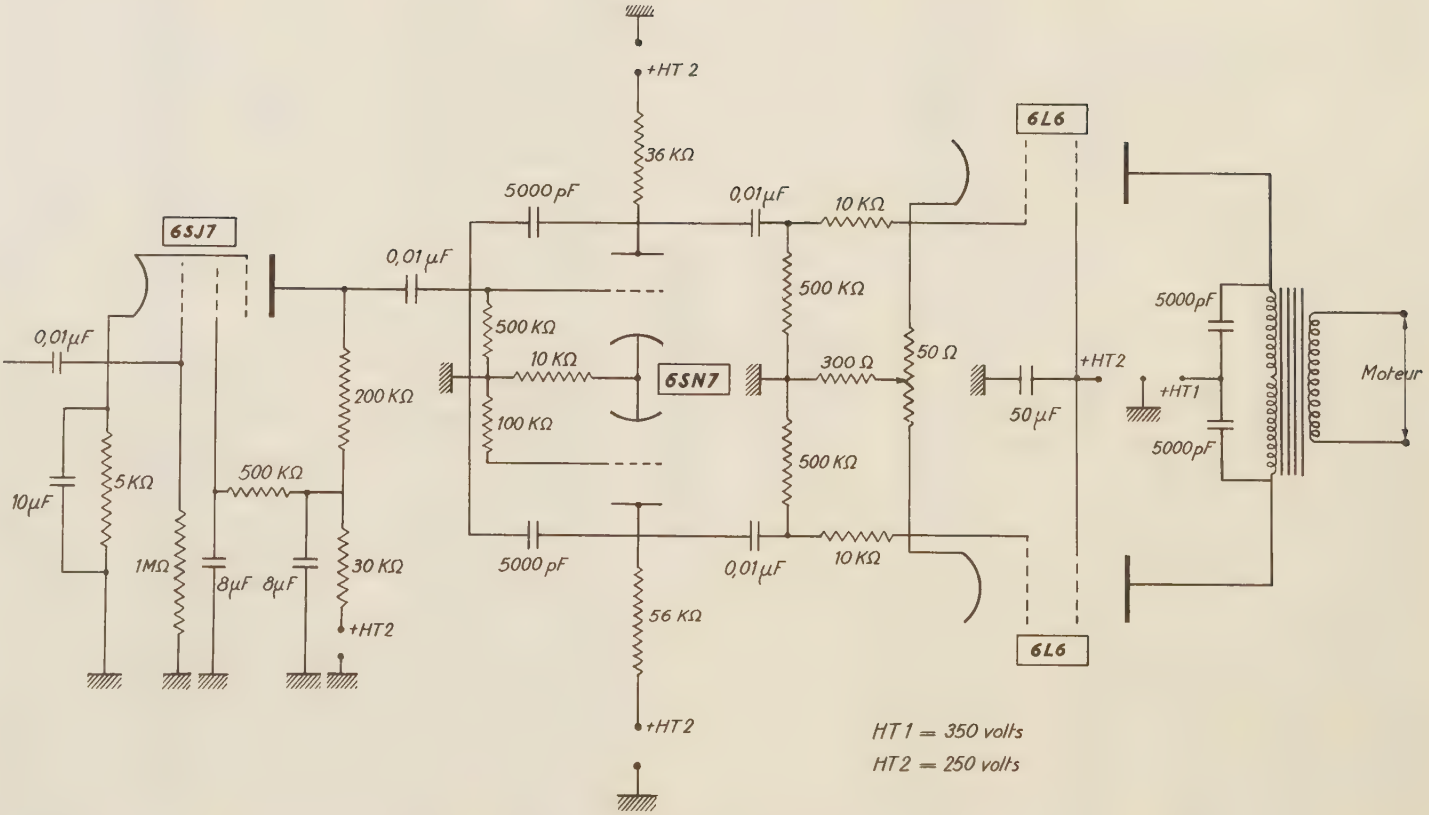
Un amplificateur d'asservissement doit avoir un gain constant dans une certaine bande de fréquences. Généralement, pour les asservissements à courant porteur, cette bande ne dépasse pas 20 à 25% de la fréquence porteuse de part et d'autre de celle-ci.

La distorsion ne devra pas être appréciable pour tout niveau de sortie inférieur à la tension maximum admissible comme tension de contrôle du moteur, et il sera bon que la saturation apparaisse à ce niveau maximum.

L'amplificateur utilisé dans notre asservissement est de conception classique ; il comprend :

- un étage préamplificateur de tension : pentode 6SJ7
- un étage déphaseur pour push-pull : double triode 6SN7
- un étage push-pull de puissance : deux tétrodes 6L6, ayant comme charge le primaire à point milieu d'un transformateur (2 × 5000 ohms), dont le secondiare (500 ohms) alimente le moteur.

Pour cet amplificateur, que nous avons construit au laboratoire, l'amplification est maximum à la fréquence porteuse de 50 Hz et peut être considérée comme constante dans une bande comprise entre 45 et 65 Hz.


6SJ7
6SN7
6L6
6L6
+HT 2
36 KΩ
5000 pF
0,01 µF
10 KΩ
0,01 µF
500 KΩ
0,01 µF
500 KΩ
10 KΩ
100 KΩ
200 KΩ
300 Ω
50 Ω
500 KΩ
50 µF
+HT2
5000pF
+HT1
5000pF
Moteur
10µF
5 KΩ
500 KΩ
1MΩ
8µF
8µF
30 KΩ
+HT2
5000 pF
0,01 µF
10 KΩ
56 KΩ
+HT2
HT 1 = 350 volts
HT 2 = 250 volts

Le gain a été mesuré : nous prenons la valeur 3500 pour la bande de fréquences considérée.

A partir d'un certain niveau d'entrée, l'appareil est saturé, et la tension de sortie ne dépasse pas 125 volts ; le moteur ne risque donc pas d'être victime de surtension.

Nous avons pu réduire de façon satisfaisante la distorsion qui accompagne la saturation en plaçant un condensateur en dérivation sur le secondaire du transformateur de sortie.

Remarquons enfin que la tension résiduelle de cet amplificateur est inférieure à 3 volts, qui est la tension de démarrage du moteur.

CHAPITRE III

ÉTUDE DE L'ENSEMBLE DU SYSTÈME ASSERVI

1 - Schéma fonctionnel

Rappelons les organes de l'asservissement et les fonctions qu'ils remplissent :

- le trigonomètre : traduit les deux tensions d'entrée U_1 et U_2 par un angle électrique θ_e et une tension fictive ρ_e ;
  traduit par une tension U_4 (tension d'erreur) l'écart $\theta_e - \theta_m$.
- l'amplificateur : amplifie la tension d'erreur pour donner la tension de contrôle du moteur; intervient par son gain k_A ;
- le moteur : élément dynamique de fonction de transfert $H(p) = \frac{a}{p(1+\sigma p)}$;
- le réducteur : réduit la vitesse du moteur dans le rapport $1/\alpha$.

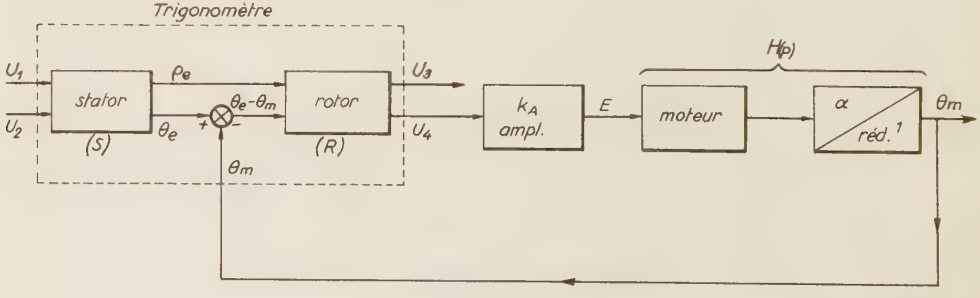
L'analyse de ce système, non linéaire, se fera par linéarisation de petits déplacements autour d'une position de référence θ_o. On écrira :

$$U_3 = k_r \rho_o \cos(\theta_e - \theta_m) \simeq k_r \rho_e$$

$$U_4 = -k_r \rho_e \sin(\theta_e - \theta_m) \simeq -k_r \rho_e (\theta_e - \theta_m)$$

l'écart $\theta_e - \theta_m$ étant exprimé en radians.

Les éléments du système et leurs fonctions étant connus, on peut tracer le schéma fonctionnel.



Le servomécanisme est à retour unitaire; la grandeur de sortie θ_m est ramenée à l'entrée pour être comparée à la grandeur θ_e.

Comme il est fréquent dans l'étude des servomécanismes, on élimine du schéma fonctionnel la fonction qui fournit la grandeur de référence. Ici, la grandeur de référence est θ_e, et on considérera comme entrées ρ_e et θ_e, c'est-à-dire les grandeurs électriques représentant les coordonnées ρ et θ (aux erreurs près, étudiées précédemment, dues aux défauts de structure interne du trigonomètre). On laissera donc le rectangle (S) en dehors du schéma.

Remarquons qu'une seule variable de sortie du trigonomètre est asservie pour la résolution du système de deux équations, à deux inconnues : $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$. Pour x et y fixés, les écarts $\delta\rho$ et $\delta\theta$ sur ρ et θ sont liés par :

$$\delta\rho \cos \theta - \rho \sin \theta \, \delta\theta = 0$$

$$\delta\rho \sin \theta + \rho \cos \theta \, \delta\theta = 0 ,$$

de sorte que l'asservissement de θ (annulation de $\delta\theta$) entraîne automatiquement celui de ρ (annulation de $\delta\rho$).

2 - Fonction de transfert en boucle ouverte; courbes représentatives

La fonction de transfert en boucle ouverte du servomécanisme : $H_o(p)$, est égale au rapport :

$$\frac{\theta_e(p)}{\theta_e(p) - \theta_m(p)}$$

L'examen du schéma fonctionnel nous permet d'écrire les relations suivantes :

$$\theta_m(p) = H(p) \, E(p)$$

$$E(p) = k_A \, U_4(p)$$

$$U_4(p) = -k_r \, \rho_e \left[\theta_e(p) - \theta_m(p)\right]$$

D'où : $$H_o(p) = -k_A \, k_r \, \rho_e \, H(p)$$

Comme $$H(p) = \frac{a}{p\,(1 + \tau p)} ,$$

on a : $$H_o(p) = \frac{-k_A \, k_r \, \rho_e \, a}{p\,(1 + \tau p)} .$$

k_A, k_r, a et τ sont connus numériquement. ρ_e peut varier de 0 à 14,1 volts (U_1 et U_2 variant de 0 à 10 volts). Nous ferons l'étude suivante en prenant pour ρ_e une valeur moyenne, soit 7.

La fonction de transfert en boucle ouverte s'écrira finalement :

$$H_o(p) = -\frac{3500 \,.\, 0{,}5 \,.\, 7.2{,}1}{50p\,(1 + 0{,}023\,p)} \simeq -\frac{500}{p\,(1 + 0{,}023\,p)}$$

Cette fonction de transfert est de la forme : $\frac{a_1}{p\,(1 + \tau\, p)}$. Avec $p = j\omega$, ω étant la pulsation des signaux d'entrée θ_e et ρ_e, on a pour le module et l'argument de $H_o(p)$:

$$|H_o(p)| = \frac{|a_1|}{\omega\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} = \frac{500}{\omega\sqrt{1 + 5{,}3.10^{-4}\omega^2}}$$

$$\varphi = \text{Arc tg}\ \frac{1}{\tau\omega} = \text{Arc tg}\ \frac{1}{0{,}023\,\omega}.$$

On peut maintenant tracer les diverses courbes représentant le module et l'argument de $H_o(p)$ en fonction de p, et le lieu de transfert en boucle ouverte.

Première courbe : $|H_o(p)|$ en fonction de ω

ω est porté en abscisses, en valeurs logarithmiques, et $|H_o(p)|$ en ordonnées en décibels.

Deuxième courbe : φ en fonction de ω

ω est porté de la même façon en abscisses, et φ en ordonnées en degrés.

Troisième courbe : $|H_o(p)|$ en fonction de φ : lieu de Black

Quatrième courbe : Lieu de transfert en boucle ouverte, lieu des points d'affixe $H_o(p)$ (deux échelles).

Telle est l'étude théorique que l'on peut faire de l'asservissement complet, après celle de ses éléments. D'importantes schématisations ont été nécessaires à divers stades de l'étude. Il est bien évident que cette étude théorique ne rendra compte que d'une façon très approchée des performances du système dont nous allons présenter maintenant la construction et l'étude expérimentale.

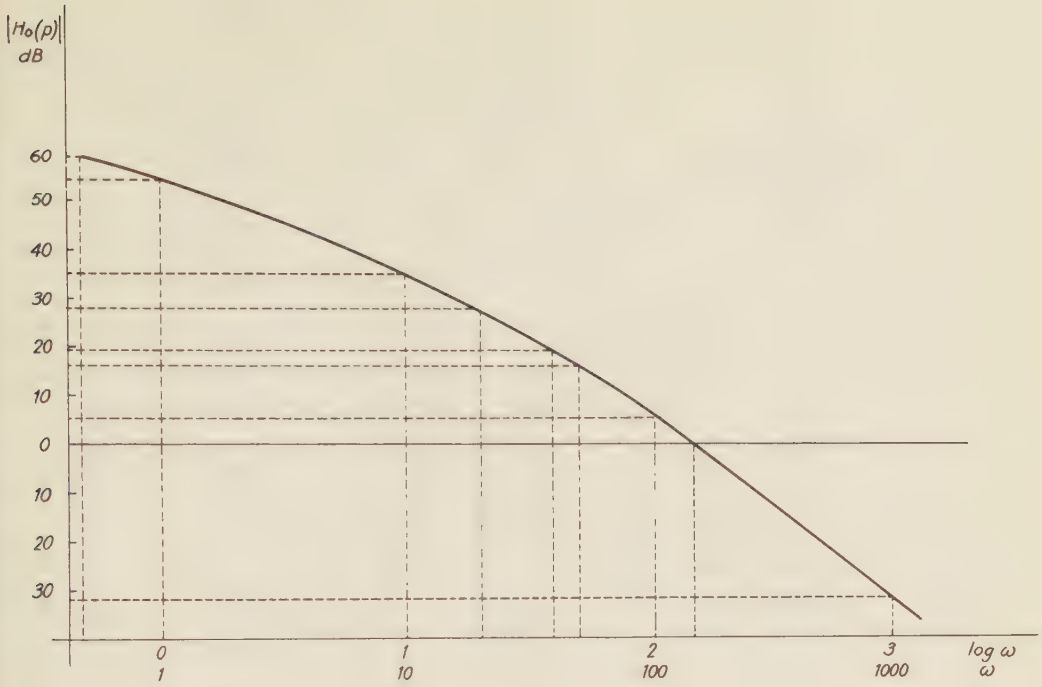
3 - Construction du système

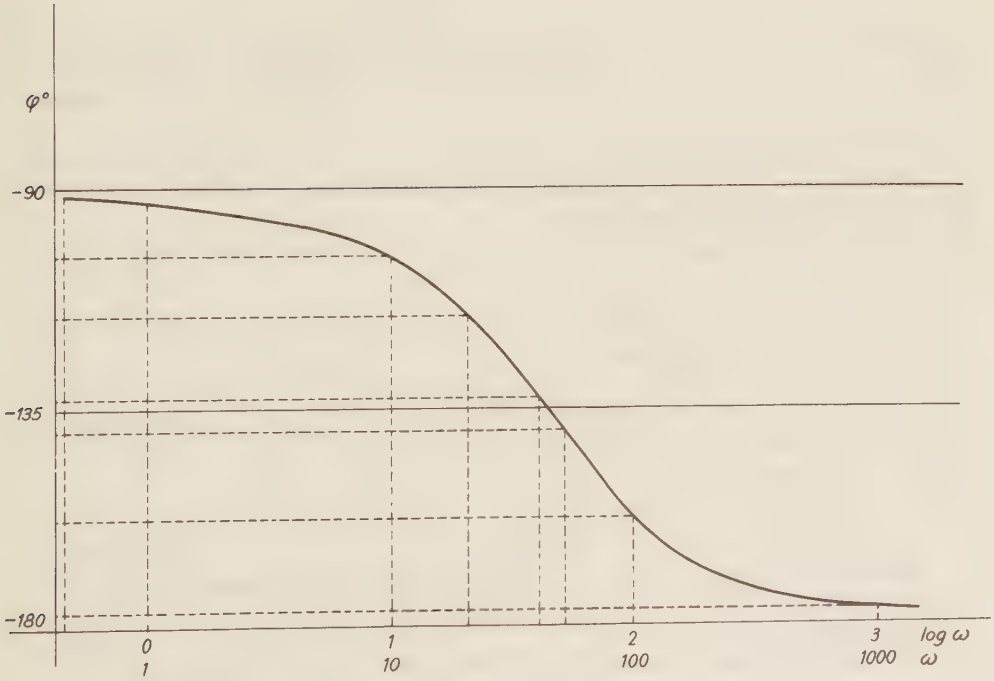
Les étapes ont été les suivantes :

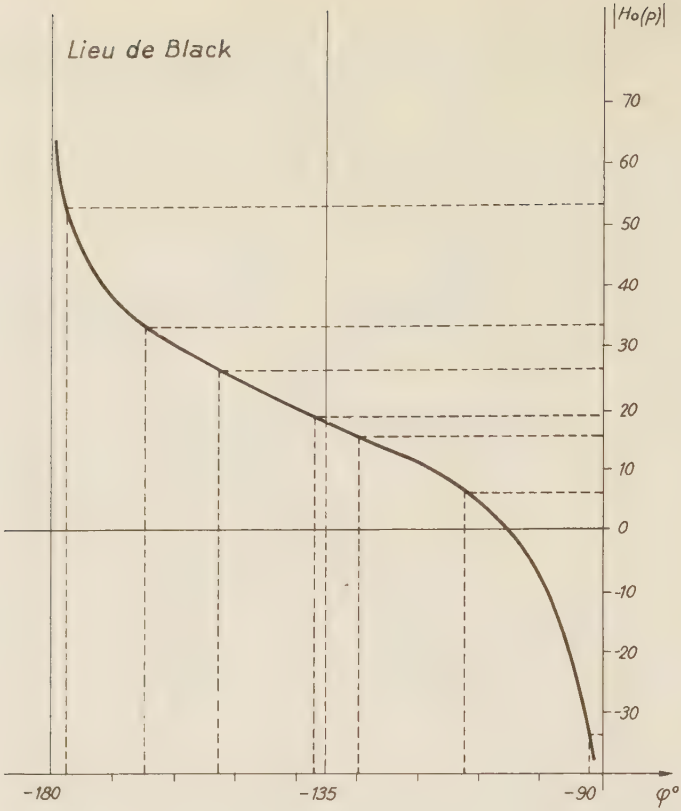
1) construction de l'amplificateur,
2) construction du transformateur alimentant le trigonomètre,
3) liaison mécanique moteur-réducteur-trigonomètre,
4) liaisons électriques entre les éléments.

1) La construction de l'amplificateur n'a pas posé de problèmes particuliers, si ce n'est toutefois l'acquisition de l'expérience nécessaire.

2) Le transformateur (cf. p. 25) est calculé largement pour supporter un long fonctionnement sans chauffer. Le secondaire, à point milieu, donne 2 × 10 volts, valeur réglée par l'alternostat


|H₀(p)|
dB
60
50
40
30
20
10
0
10
20
30
0
1
1
10
2
100
3
1000
log ω
ω


φ°
-90
-135
-180
0
1
1
10
2
100
3
1000
log ω
ω



alimentant le primaire. La construction a nécessité seulement le calcul de la puissance, du rapport de transformation, et de la section des conducteurs. Il n'y a pas de problème d'impédance ou d'inductance à ajuster.

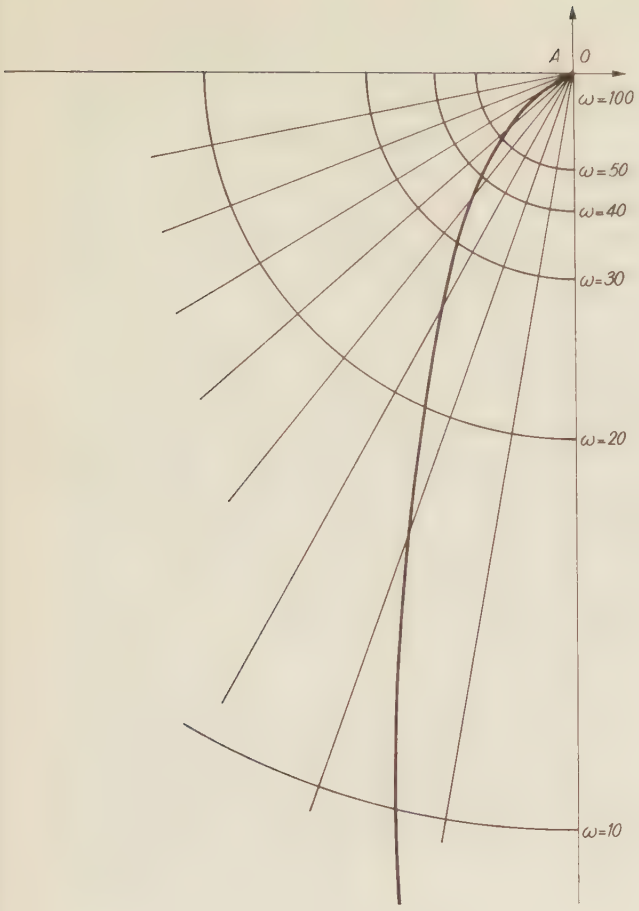
3) Le montage de l'ensemble mécanique a été exécuté à l'aide d'éléments standard "Méca-Labo", spéciaux pour la construction de maquettes de servomécanismes.

Ces éléments sont :

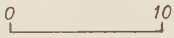
1 platine de montage
1 support de moteur
1 support de trigonomètre
2 paliers à billes
1 arbre de Ø 6 mm, long 100 mm
1 couple d'engrenages côniques de rapport 1
2 joints d'Oldham
1 cadran gradué de 0 à 360 degrés
1 aiguille

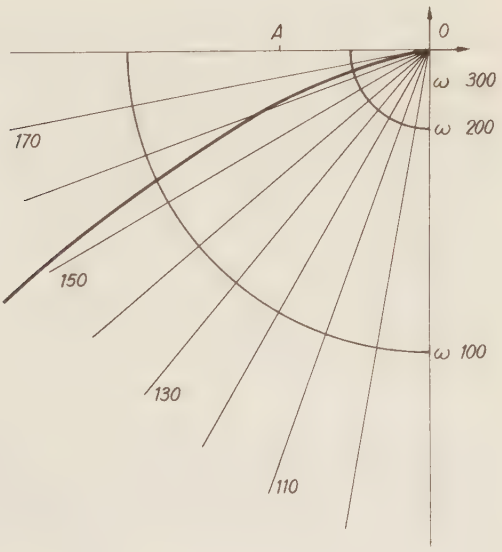
Pour le réducteur (1), il a fallu construire un support spécial, qui n'existe pas dans les éléments standard.

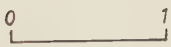
(1) Réducteur SAPMI (Société d'Appareillage Electro-Micro-Mécanique).



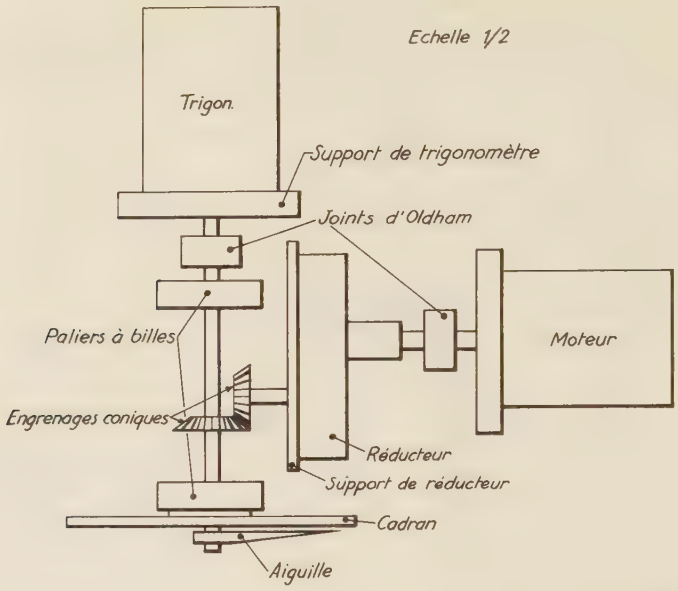
Lieu de transfert en boucle ouverte







Les éléments sont fixés sur la platine parsemée de trous, à l'aide de vis et écrous à oreilles. Le schéma du montage vu de dessus est le suivant :



4) Les liaisons électriques n'ont pas posé de problème particulier. Les liaisons entre les potentiomètres et le trigonomètre, et entre celui-ci et l'amplificateur sont réalisées en câble blindé. Cela est important surtout pour le transport de la tension d'erreur à l'amplificateur.

4 - Essais et améliorations du servomécanisme

Le fonctionnement de chaque élément du système ayant été vérifié (amplificateur, transformateur, etc.), on a pu mettre en marche le système complet. Celui-ci étant au repos, origine des angles repérée, trigonomètre placé au zéro, nous l'avons soumis à une entrée en échelon en faisant $U_1 = U_2 = 2$ volts. Le système est entré immédiatement en oscillations permanentes d'environ 8° d'amplitude autour de la position moyenne $\theta = 45°$. En faisant varier U_1 et U_2 de façon quelconque en tournant les axes des potentiomètres, nous avons pu voir persister les oscillations autour des positions angulaires correspondantes. Le système est donc correct au point de vue montage, puisque les oscillations se situent autour des positions angulaires requises.

Mais ceci montre que le servomécanisme n'est en réalité pas du second ordre puisqu'il oscille de façon permanente. En effet, un système du second ordre peut au plus être le siège d'oscillations amorties. Il y aura lieu de revenir sur l'étude théorique déjà faite pour essayer d'expliquer le phénomène.

Les expériences faites sur tous les systèmes asservis d'ordre quelconque montrent que l'instabilité apparaît lorsqu'on augmente suffisamment le gain. Cela veut dire qu'aucun asservissement réel, calculé théoriquement du second ordre, ne l'est en réalité. Le pompage de notre système confirme ce fait.

Lorsqu'on met un système en équations, on idéalise les fonctions connues (linéarisation des courbes caractéristiques d'un moteur, des courbes caractéristiques des tubes électroniques, etc), et on néglige des phénomènes de retard qui apparaîssent à presque tous les étages de la chaîne d'action. Le résultat est que l'ordre réel de l'appareil est au moins supérieur d'une unité à l'ordre calculé.

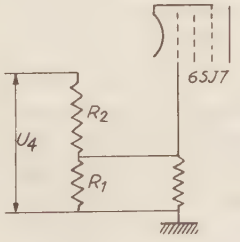
Seules des expériences pratiques permettraient d'obtenir la fonction de transfert réelle d'un élément de servomécansime ou d'un servomécanisme. Dans le cas d'un servomécanisme à courant porteur tel que celui que nous étudions, il faudrait pour cela disposer d'un appareillage très spécialisé : générateurs de signaux à courant porteur, déphaseurs, dynamo tachymétrique, etc. Les expériences permettraient de mesurer le gain et la phase en fonction de la pulsation du signal d'entrée, et ce tracer par points les courbes correspondantes. Par la comparaison des courbes réelles et des courbes théoriques, on pourrait espérer déterminer une constante de temps supplémentaire correspondant au système étudié comme système du troisième ordre.

Présentons maintenant les diverses améliorations successives que nous avons apportées à notre appareil.

Nous reportant à ce que nous avons dit page 12, il nous a semblé au début que l'adjonction d'un réseau correcteur à courant porteur pourrait être profitable. D'autre part, on peut toujours empêcher un asservissement de pomper, par une réduction du gain, mais il faut en mesurer les conséquences en ce qui concerne la précision.

Nous avons calculé et construit plusieurs réseaux correcteurs en T ponté réalisant des corrections de phase dans un large domaine. Ils n'ont pas réduit le pompage de façon appréciable; encore semble-t-il que cette légère amélioration ne doit due qu'à la réduction du gain par ces réseaux. Or ce gain varie considérablement avec les valeurs de ρ_e (0 à 14,1 volts), et dans ces conditions, un réseau correcteur aussi parfait soit-il est insuffisant à assurer la stabilité.

Pour juger de l'importance des variations de ρ_e, on a d'abord diminué le gain de l'amplificateur, grâce à un diviseur de tension placé à l'entrée :



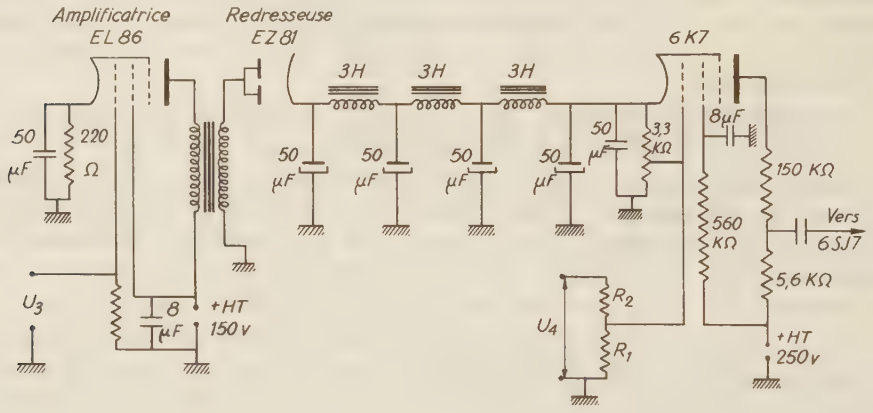
Le gain du système a été réduit dans le rapport $\frac{R_1}{R_1 + R_2}$.

Lors des premiers essais, l'instabilité apparaissait pour toute valeur de ρ_e. En diminuant petit à petit k_A, on devait arriver à rendre le système stable pour les faibles valeurs de ρ_e, l'instabilité n'apparaissant qu'à partir d'un certain niveau. C'est ce qui s'est produit effectivement par le changement du rapport ci-dessus. En rendant ce rapport assez petit, on pouvait faire disparaître toute instabilité pour toute valeur de ρ_e, mais le système était sans réaction ou mou pour les faibles valeurs.

Nous avons alors réalisé un contrôle automatique du gain de l'amplificateur tel que les variations de ρ_e entraînent des variations en sens inverse du gain.

Pour cela, on a adjoint à l'amplificateur un tube à pente variable, pentode 6K7, dont la cathode est polarisée positivement par la tension U_3 du trigonomètre amplifiée, redressée et soigneusement filtrée.

Nous avons réalisé le montage décrit par le schéma suivant :

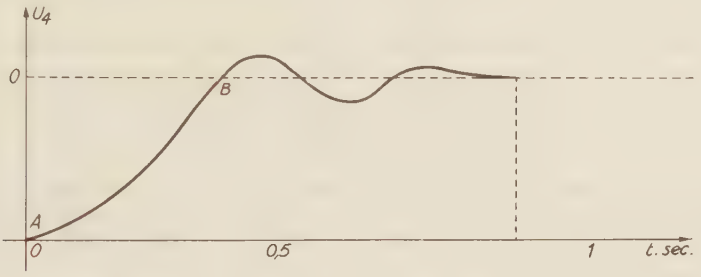


La polarisation minimum, qui est due à la polarisation automatique du tube par la résistance de cathode est de 4 volts. Le gain de l'amplificateur étant déjà suffisant sans la 6K7, on a réduit le débit de celle-ci par de fortes résistances de plaque et d'écran. Cela a permis d'insérer une forte résistance de cathode sans dépasser la polarisation minimum de 4 volts. L'intérêt de cette grosse résistance de cathode est qu'elle permet d'obtenir une polarisation maximum de 28 volts pour la valeur maximum de 7,4 volts de U_3 ($U_3 = k_r \rho_e$), malgré le débit faible du secondaire du tube EL86.

Les résultats obtenus se sont révélés satisfaisants, avec cette grande amplitude de variation de la tension de cathode, le contrôle automatique du gain est efficace pour toutes les valeurs de ρ_e. On a pu régler le diviseur de tension placé maintenant à l'entrée du tube 6K7, pour que le gain de l'asservissement assure un compromis convenable entre la stabilité et la précision.

Pour rendre compte de la qualité de la stabilité, nous avons pris des photographies de régimes transitoires tels qu'ils apparaissent sur l'écran de l'oscillographe, et correspondant à de grands échelons de position (45°). Elles représentent les variations de U_4 en fonction du temps et montrent que la position angulaire est atteinte de façon précise après trois dépassements au maximum.

La figure ci-dessous montre les variations d'amplitude de U_4 (nous avons supprimé la porteuse).



L'échelon de position étant grand (45°), on voit sur la courbure de l'arc $\widehat{AB}$ l'influence du cosinus de l'écart angulaire dans la tension d'erreur U_4 (influence que nous avons négligée dans toute l'étude, ou nous avons supposé l'écart petit.

La précision est difficile à mettre en évidence par lecture des angles sur le cadran, à cause du jeu du réducteur (de l'ordre de 1°). Nous nous sommes assurés que la précision était la meilleure possible en vérifiant que les états d'équilibre du servomécanisme correspondaient à la valeur minimum de la tension d'erreur (résidu de tension).

L'utilisation d'un réducteur de meilleure qualité aurait permis des lectures beaucoup plus précises au cadran; compte tenu de l'imperfection angulaire du trigonomètre (45' maximum), l'erreur sur θ aurait pu être ramenée à 1°, alors que nous l'avons laissée atteindre 2° en gardant notre réducteur imparfait.

BIBLIOGRAPHIE

DUCROCQ P. - Découverte de la Cybernétique. Julliard 1955.

GILLE J.-C., PELEGRIN M., DECAULNE P. - Théorie et Technique des Asservissements. Dunod 1956.

NASLIN P. - Technologie et Calcul Pratique des Systèmes asservis. Dunod 1958.

BONAMY M. - Servomécanismes. Théorie et Technologie. Masson 1957.

AHRENDT W.R. - La pratique des Servomécanismes. Librairie Polytechnique Ch. Béranger 1959.

BONNET P. - Les réseaux correcteurs pour servomécanismes à fréquence porteuse. L'Onde Electrique, vol. XXXIV, nos 329-330 et 331 (1951).

LANDRIN R. - Le transféromètre. L'Onde Electrique, vol. XXXIV, n° 328 (1954).

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 1

Chapitre I - Généralités sur l'étude des servomécanismes
Présentation du système asservi à étudier 3

Chapitre II - Etude des éléments du système asservi 15

I - Le trigonomètre 15

II - Le moteur 22

III - L'amplificateur 27

Chapitre III - Etude de l'ensemble du système asservi 30

Bibliographie 40

J. & R. SENNAC, Imprimeurs, 54, Faubourg Montmartre, PARIS-9e — 10 159